

インパクトにおけるテニスプレーヤーの手首関節衝撃振動の予測* (超大型ヘッドをもつ従来重量型ラケットと軽量型ラケットの比較)

川副 嘉彦^{*1}, 武田 幸弘^{*2}, 中川 慎理^{*2}, Federico CASOLO^{*3}, 友末 亮三^{*4}, 吉成 啓子^{*5}

Prediction of Impact Shock Vibrations at Tennis Player's Wrist Joint (Comparison between Conventional Weight Racket and Light Weight Racket with Super Large Head Size)

Yoshihiko KAWAZOE^{*1}, Yukihiro TAKEDA, Masamichi NAKAGAWA, Federico CASOLO,
Ryoso TOMOSUE and Keiko YOSHINARI

^{*1} Saitama Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering
1690, Fukaya, Saitama, 369-0293 Japan

The lightweight racket with handle-light configuration and large head size is recent tendency of high-tech tennis rackets, increasing power or post-impact ball velocity with an increasing racket swing speed. This paper investigated the performance of lightweight balanced racket with super-large head size with 120 square inches in terms of feel or comfort. It predicted the effect of the mass and mass distribution of super-large head sized rackets on the impact shock vibrations of the racket handle and the player's wrist joint when a player hits a flat forehand drive. The prediction is based on the identification of the racket characteristics, the damping of the racket-arm system, equivalent mass of the player's arm system and the approximate nonlinear impact analysis in tennis. A lightweight balanced racket (mass: 292 g, the center of gravity L_G : 363 mm from the butt end) and a conventional weight and weight balanced racket (349 g, L_G : 323 mm) are selected as representatives. These two super-large head sized rackets made of carbon graphite have the same head size and same geometry. The result showed that the shock vibration of the lightweight balanced racket with super-large sized head is much larger than that of the conventional weight balanced type racket. It also showed that the sweet area of the former in terms of the shock vibration shifts from the center to the topside on the racket face compared to the latter. This is because the location of the grip on the racket handle is further from the location of the node on the handle of the first mode of lightweight balanced racket than that of the conventional weight balanced racket.

Key Words : Dynamics, Sports Engineering, Impact, Tennis Racket, Shock Vibrations, Wrist Joint, Super Large Sized Racket, Weight Distribution, Experimental Modal Analysis

1. 緒 言

スポーツ用具は、素材の複合化により設計・製造の自由度が大きくなり、身体的条件や技術的条件の異なる使用者との整合を考慮したきめの細かい設計をめざす段階に至っている。しかし、テニスにおけるラケットとボールの衝突現象は、ボールとストリングス（俗称ガット）の大変形およびフレームの振動をともなう非線形の力学

* 原稿受付 2013 年 8 月 29 日, Journal of System Design and Dynamics, Vol.4, No.2 (2010), pp.331-347

(原稿受付 2009 年 11 月 17 日)

^{*1} 正員, フェロー, 埼玉工業大学 (〒369-0293 埼玉県深谷市普濟寺 1690)

^{*2} 埼玉工業大学

^{*3} Politecnico di Milano (ミラノ工科大学)

^{*4} 安田女子大学

^{*5} 白百合女子大学

E-mail: kawazoe.yoshihiko@gmail.com



であり、現実の打撃ではさらに人間系が絡んでくるので、現象は複雑である。したがって、ラケットの物理特性と性能の関係には不明な点が多い。

ハンドル部分の重量を減らしてトップヘビーにすることにより反発性を低下させないで軽量化をはかり、操作性の改善によりスイング速度を上げることにによりパワーを増し、ヘッドの大型化によりスピン（回転数）を増してコントロール性を改善するというのが最近のハイテク・ラケットの特長である。

本論文では、超大型ヘッドをもつ軽量ラケットの打球感に関する性能を明らかにするために、プレーヤーがフォアハンドドライブでボールをフラットに打撃するとき、ラケットの質量および質量分布がハンドルとプレーヤーの手首関節衝撃振動におよぼす影響について予測する。予測は、テニスのインパクトにおけるラケット特性、ラケットー腕系の減衰特性、プレーヤーの腕系の等価質量などの同定と近似非線形解析に基づいている。材料および幾何学的形状の等しいカーボングラファイト製、ヘッド面積 120 in^2 のラケットについて、代表的な従来重量型はストリングを含む質量 349 g 、ハンドル端から重心位置までの距離 323 mm とし、代表的な軽量型はストリングを含む質量 292 g 、ハンドル端から重心位置までの距離 363 mm を対象とした。

2. インパクト時にラケットから腕系に伝達される衝撃力の予測法⁽¹⁾⁽³⁾

図1は、ラケットから手首関節へ伝達される衝撃力を予測するための衝突モデルを示す。プレーヤーがラケットでボールを打撃したときにストリング面 P_0 においてボールとストリングスに作用する衝突力を S_0 、プレーヤーの手首関節 P_1 、肘関節 P_2 、肩関節 P_3 に作用する衝撃力をそれぞれ S_1 、 S_2 、 S_3 とする。腕系の衝撃振動は、インパクトの瞬間には重力や筋力は衝突力にくらべて小さいとして無視し、腕系の各関節はピン結合として扱い、ハンドルの握りの位置と手首関節の位置の距離を無視し、肩関節に作用する力 S_3 は肩関節の速度には影響しないと仮定する。したがって、ラケットはプレーヤーの前腕に自由にピン結合され、前腕は上腕に自由にピン結合され、上腕はプレーヤーの胴体に自由にピン結合されていると考えることができる。衝突の前後、すなわち、衝突力 S_0 、 S_1 、 S_2 、 S_3 が作用していないときは、運動はプレー中の筋力や重力に依存する。したがって、グリップを握る強さは、衝突の瞬間は影響しないことになる。

手首関節、肘関節、肩関節の位置をそれぞれ P_1 、 P_2 、 P_3 とすると、腕系は2つの直線 P_1P_2 、 P_2P_3 で表される。前腕の長さを $a_a = P_1P_2$ とし、前腕質量 m' に手の質量 m'' を加えて関節位置 P_1 に集中させ、前腕の質量を $m_a = m' + m''$ 、肘関節 P_2 から前腕質量中心までの距離を b_a とする。さらに、肘関節 P_2 周りの慣性モーメントを J_a 、長さ $a_b = P_2P_3$ の上腕質量を m_b 、肩関節 P_3 から上腕質量中心までの距離を b_b 、肩関節 P_3 に関する慣性モーメントを J_b とする。関節 P_1 の衝撃加速度 $A_{nv} = dV_1/dt$ と衝撃力 S_1 の関係を以下のように導くことができる。ボールを打撃するときインパクトの瞬間によくあるケースとして、インパクトにおいて上腕と前腕が一系列で衝撃力 S_1 が軸 $P_1P_2P_3$ に直角の場合を考える。腕と前腕の角速度をそれぞれ ω_a 、 ω_b とすると、ラケットから手に伝わる衝撃力 S_1 が作用するとき関節 P_1 の速度 V_1 は以下になる。

$$V_1 = \omega_a a_a + \omega_b a_b + V_3 \quad (1)$$

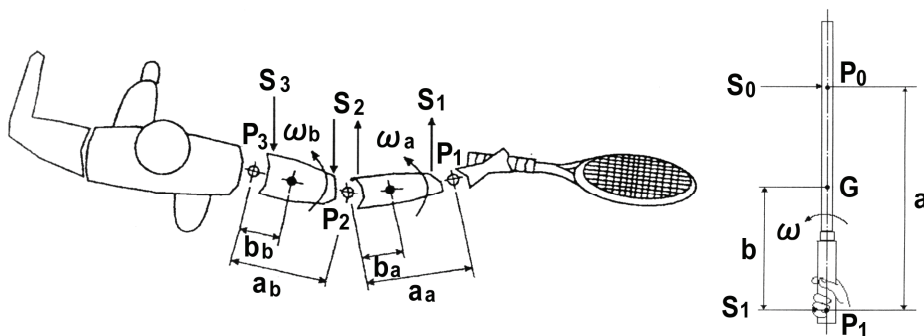


Fig. 1 Impact model for the prediction of the shock force transmitted to the arm joints from a racket.

ただし、肩関節の中心 P_3 の速度 V_3 は上述のようにインパクトにおいても不変としている。
図 1 の腕に対して、以下の 2 つの動的平衡方程式が成り立つ。

$$S_2 a_b + J_b \, d \, \omega_b / d \, t = 0 \quad (2-1)$$

$$S_3 + S_2 + m_b b_b \, d \, \omega_b / d \, t = 0 \quad (2-2)$$

上式から、次の 2 式を導くことができる。

$$d \, \omega_b / d \, t = - S_2 a_b / J_b \quad (3)$$

$$S_3 / S_2 = m_b a_b b_b / J_b - 1 \quad (4)$$

前腕に対して、以下の 2 つの動的平衡方程式が成り立つ。

$$S_l a_a - J_a \, d \, \omega_a / d \, t - m_a a_b b_a \, d \, \omega_b / d \, t = 0 \quad (5-1)$$

$$S_2 + S_l - m_a (a_b \, d \, \omega_b / d \, t + b_a \, d \, \omega_a / d \, t) = 0 \quad (5-2)$$

さらに、式(3)の関係を用いて計算すると、以下の式を得る。

$$S_2 / S_l = \chi_a \quad (6-1)$$

$$d \, \omega_a / d \, t = \mu_a S_l a_a / J_a \quad (6-2)$$

ただし、

$$\mu_a = [1 + (m_a a_b^2 / J_b) (1 - b_a / a_a)] / [1 + (m_a a_b^2 / J_b) (1 - m_a b_a^2 / J_a)] \quad (7-1)$$

$$\chi_a = (m_a a_a b_a / J_a - 1) / [1 + (m_a a_b^2 / J_b) (1 - m_b b_a^2 / J_a)] \quad (7-2)$$

したがって、式(1)と式(7) に対して、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} A_{nv} = dV_1 / d \, t &= d(\omega_a a_a + \omega_b a_b + V_3) / d \, t = a_a \, d \, \omega_a / d \, t + a_b \, d \, \omega_b / d \, t \\ &= [\mu_a a_a^2 / J_a - \chi_a a_b^2 / J_b] S_l \end{aligned}$$

ここで、

$$M_H = 1 / [\mu_a a_a^2 / J_a - \chi_a a_b^2 / J_b] \quad (8)$$

とおくと、握りの部分と手首関節の衝撃加速度 A_{nv} は最終的に以下のように表すことができる。

$$A_{nv} = dV_1 / d \, t = S_l / M_H \quad (9)$$

式(9)から、腕と前腕の慣性の効果は、手に集中した質量 M_H に起因しているとみなすことができる。したがって、ボールとラケットの衝突は、ハンドルの握りの位置と手首関節の位置 P_1 の距離を無視しているので、ラケットハンドルの点 P_1 に質量 M_H を付加することにより、ラケットを宙吊りと仮定して解析することができる。

ボールがラケットに衝突するとき、もしボールとラケットの間に作用する衝突力 S_0 が与えられると、衝撃力 S_I と角加速度 $d\omega/dt$ は以下の2つの動的平衡方程式から得られる。

$$S_0 a + J d\omega/dt + M_R b dV_I/dt = 0 \quad (10-1)$$

$$S_0 + M_R b d\omega/dt + (M_R + M_H) dV_I/dt = 0 \quad (10-2)$$

さらに計算すると、以下のように表すことができる。

$$d\omega/dt = -\mu a S_0 / J \quad (11)$$

$$S_I = M_H dV_I/dt = \chi S_0 \quad (12)$$

ただし、

$$\mu = [1 + (M_R/M_H)(1 - b/a)] / [1 + (M_R/M_H)(1 - M_R b^2/J)] \quad (13)$$

$$\chi = (M_R ab/J - 1) / [1 + (M_R/M_H)(1 - M_R b^2/J)] \quad (14)$$

ここで、 M_R はラケットの質量、 a はストリング面のボール衝突位置とハンドルの握り位置との距離、 b はハンドルの握り位置とラケットの重心との距離、 J は手首の関節位置 P_1 まわりの慣性モーメントである⁽¹⁾⁻⁽³⁾。

3. ラケット・腕系とボールとの衝突力と反発係数の予測法

3.1 ストリング面の打撃位置に換算したラケット質量およびラケット・腕系の質量

ボールとラケットの衝突解析を簡単化するために、ラケットのストリング面（ストリングベッドともいう）の打撃位置（打点）に換算した換算質量 M_r を導入する。ストリング面上のボールとの衝突位置とラケットあるいはラケット・腕系の重心との距離および慣性モーメントが既知であれば、角速度に関する運動量保存則から換算質量を導くことができる。ボールが速度 V_{B0} でラケットに正面衝突するとし、ラケットは衝突後に重心周りに回転しながら直線運動すると仮定する。簡単化のために、衝突直前のラケット速度 $V_{G0} = 0$ の場合を考えると、力積 $[F(t) dt]$ は、以下のように表すことができる。ただし、 $F(t)$ は衝突力、 m_B はボール質量、 V_B は衝突直後のボール速度、 M_R はラケット質量、 V_G は衝突直後のラケット重心の速度である。

$$[F(t) dt] = m_B V_{B0} - m_B V_B \quad (15)$$

$$[F(t) dt] = M_R \cdot V_G \quad (16)$$

衝突直前のラケット角速度 $\omega_0 = 0$ の場合は、角速度に関する運動量保存則を適用すると、以下のように書ける。ただし、 c_0 はラケット重心とストリング面衝突位置の距離、 I_{G0X} は重心周りの慣性モーメント、 ω は衝突直後のラケット角速度である。

$$[F(t) dt] \cdot c_0 = I_{G0X} \cdot \omega \quad (17)$$

幾何学的な関係より、衝突直後のストリング面衝突位置におけるラケット速度 V_R は以下のように表すことができる。

$$V_R = V_G + \omega c_0 \quad (18)$$

ラケットの角速度 ω と速度 V_G を消去すると、以下のように書ける.

$$\left(\frac{I_{G0X} M_R}{I_{G0X} + M_R c_0^2} \right) V_R = m_B (V_{B0} - V_B) \quad (19)$$

したがって、以下のように直線運動の運動量保存則の形で表すことができる.

$$m_B V_{B0} = m_B V_B + M_r V_R \quad (20)$$

ただし,

$$M_r = \frac{I_{G0X} M_R}{I_{G0X} + M_R c_0^2} \quad (21)$$

であり, M_r は自由な宙吊りラケットの衝突位置に換算した質量を意味する. したがって, ラケットの剛体運動を質点運動として解析できるので, 反発特性などの衝突現象を理解しやすい. 慣性モーメント I_{G0X} はラケットの物理振子実験における周期の実測値 T_X , 重力加速度 g , 物理振子の重心と支点との距離 d を用いて以下のように算出することができる.

$$I_{G0X} = \left(\frac{T_X}{2\pi} \right)^2 M_R g d - M_R d^2 \quad (22)$$

インパクトの瞬間の衝撃力は, 重力や筋力による力に比べて一桁大きいので, 前述のように, ラケットはプレーヤーの前腕に自由にピン結合され, 前腕は腕に自由にピン結合され, 腕はプレーヤーの胴体に自由にピン結合されていると考える. 腕と前腕の慣性の効果は, 手に集中した質量 M_H に起因しているとみなすことができる. したがって, ボールとラケットの衝突は, ラケットハンドルの握りの位置に質量 M_H を付加することにより, ラケットを宙吊りと仮定して解析することができる. 衝突位置に換算したラケット・腕系の換算質量 M_r は以下のように導くことができる.

$$M_r = \frac{I_{GMX} (M_R + M_H)}{I_{GMX} + (M_R + M_H) c^2} \quad (23)$$

ただし,

$$c = c_0 + (L_{G0} - L_H) M_H / (M_R + M_H) \quad (24)$$

$$I_{GMX} = I_{G0X} + M_R \Delta G^2 + M_H (L_{G0} - L_H - \Delta G)^2 \quad (25)$$

$$\Delta G = (L_{G0} - L_H) M_H / (M_R + M_H) \quad (26)$$

ここで, L_{G0} はラケットの重心とハンドル端との距離, I_{G0X} はラケット重心周りの慣性モーメント, c_0 はラケットの衝突位置と重心との距離, L_H はプレーヤーの手の位置とハンドル端との距離である. また, I_{GMX} はラケット・腕系の重心周りの慣性モーメントであり, c はラケット・腕系の重心と衝突位置との距離である.

3.2 ボール・ストリング系の復原力特性とエネルギー損失⁽⁴⁾⁻⁽⁸⁾

図2は、荷重と変形量の関係を示す復原力特性を求めるためのボールおよびボール・ストリング複合系の荷重方法を示す。図2(a)は、平板で挟んだボールに荷重を加えて変形させた場合、図2(b)はラケットヘッド外周を固定してストリング面上のボールに荷重を加えた場合のボールとストリングの変形量の和を測定し、図式的にストリングの非線形復原力特性を求める。図3は、(a)と(b)の測定結果例である。ボールとラケットとの衝突の瞬間を示す高速ビデオ写真において、衝突速度が極端に大きい場合を除けば、衝突時のボールはストリング面と接触している片側のみ主に変形しているように見える⁽⁵⁾。中心に質量を集中させたボールが衝突においてストリング面に接触する片側だけ変形すると仮定すると⁽⁷⁾、ボールの変形量に対する復原力特性 F_B 、ストリング面の変形量（たわみ）に対するストリング面の復原力特性 F_G 、ボール・ストリング複合系の変形量に対する復原力特性 F_{GB} を図3を用いて図4のように求めることができる。これらの復原力特性は最小自乗法を用いて変形量（変位 X ）に関して多項式近似できる。ボール、ストリング、ボール・ストリング複合系それぞれの復原力特性の変位に関する微分、すなわち、ばね剛性 K_B 、 K_G 、 K_{GB} は、図5のように求めることができる。これらのばね剛性は、強い非線形・硬化ばね特性を示す。

図6は、ボールが剛体壁へ衝突するときの入射速度に対する反発係数実測値を示す。一方、図7は、ラケットヘッドを固定したストリング面にボールが衝突するときの反発係数実測値 e_{BG} である。反発係数（coefficient of restitution）は COR と表記されることが多い。図6ではボールと剛体壁との反発係数は入射速度の増大とともに減少するが、図7ではボールとストリング面の反発係数 e_{BG} はボールの入射速度やストリング・テンション（初張力）が変わっても大きくは影響されない。ボールとストリングの材料に固有の反発係数 e_{BG} はストリングの重要な役割を示しており、入射速度やストリング・テンション（初張力）が変わっても大きくは影響されないという特長は、ボール・ストリング複合系の強い非線形復原力特性による⁽⁴⁾。衝突速度が増すと、図8におけるボール・ストリング複合系の等価ばね剛性 K_{GB} が非線形特性により増大するので、等価減衰係数 C_{GB} が増大しても、減衰係数比 $\zeta_{GB} = C_{GB} / (2m_B^{1/2} K_{GB}^{1/2})$ が衝突速度に依存せず、ほぼ一定になる。ボール・ストリング複合系のエネルギー損失は反発係数 e_{BG} と密接に関係している。

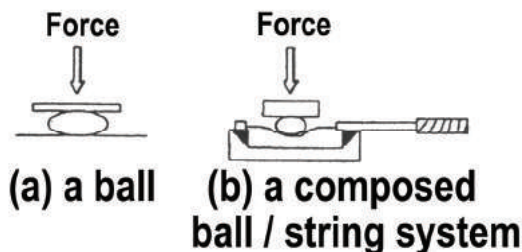


Fig.2 Illustrated applied force- deformation test

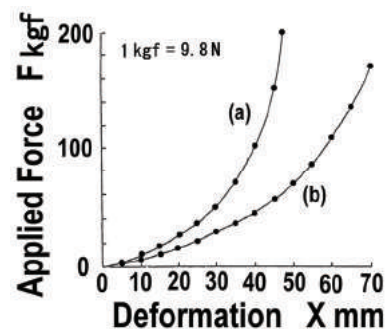


Fig.3 Results of a force-deformation test.

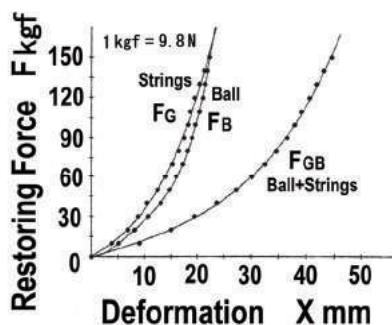


Fig.4 Restoring forces vs. deformation of a ball, strings, and a composed ball/string system assuming that a ball deforms only at the side in contact with the strings.

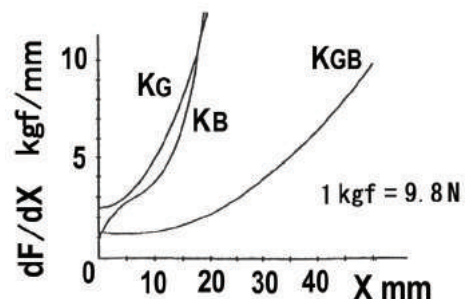


Fig.5 Stiffness vs. deformation of a ball, strings, and a composed ball/string system assuming that a ball deforms only at the side in contact with the strings.

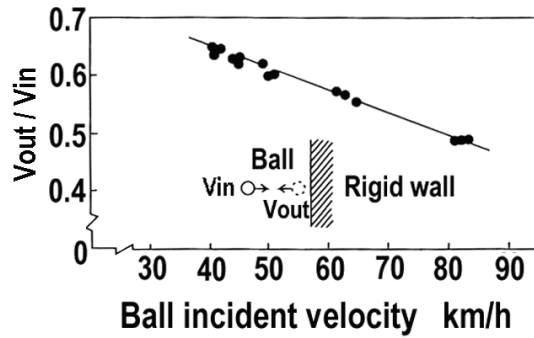


Fig.6 Measured coefficient of restitution (COR) between a ball and a rigid wall.

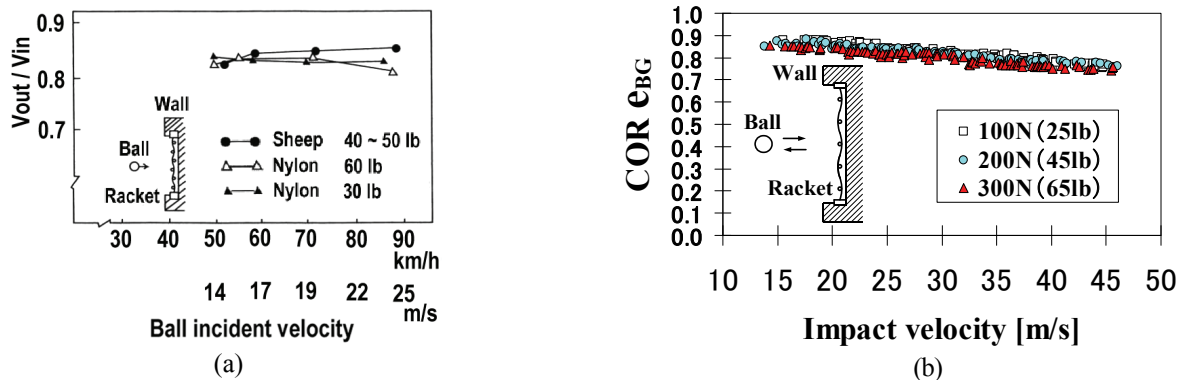
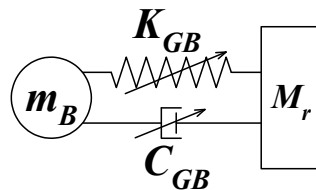
Fig.7. Measured COR e_{BG} between a ball and strings with frame clamped.

Fig.8 Non-linear impact model of a ball-string system.

接触時間、すなわちボールがストリング面上に乗っている時間の実測値は、ラケットフレームの剛性が標準的な場合と厚ラケと呼ばれる高剛性の場合とでほとんど差異がない⁽⁴⁾。したがって、接触時間に寄与する主要な因子は、ボール質量、ラケットの質量分布、ボールとストリング面の非線形剛性である。すなわち、接触時間は、集中質量 m_B と非線形ばね剛性 K_B をもつボールと振動しないフレームに支持された非線形ばね剛性をもつストリング面が衝突するとして計算することができる。反発係数実測値 e_{BG} は、ボールとストリング面の衝突におけるエネルギー損失に相当し、図8の C_{GB} に対応する。

3.3 ボールとラケットの反発係数の予測法

ラケットフレームの振動を無視すると、ボールとストリング面の反発係数実測値 e_{GB} と運動量理論により、ボールの衝突直後の速度 V_B と衝突位置のラケット速度 V_R を近似的に求めることができる。運動量保存則と反発係数の式から、ラケットフレームの振動を無視したときの力積 $\int F(t) dt$ は以下のように書ける。ただし、 m_B はボールの質量、 M_r はラケット・腕系の衝突位置の換算質量、 V_{Ro} は衝突前のラケットヘッド速度である。

$$\int F(t) dt = m_B V_{Bo} - m_B V_B = (V_{Bo} - V_{Ro})(1 + e_{GB})m_B/(1 + m_B/M_r) \quad (27)$$

力積波形を実測波形に似た正弦半波に近似して、図8の1自由度系の固有振動の半周期を接触時間とすれば、接触時間 T_c は振動理論から以下ようになる。

$$T_c = \pi m_B^{1/2} / (K_{GB} (1 + m_B/M_r))^{1/2} \quad (28)$$

解析を簡単にするために、接触時間 T_c の間作用する近似的な等価衝突力 F_{mean} を導入すると以下のように書ける。

$$\int_0^{T_c} F(t) dt = F_{mean} \cdot T_c \quad (29)$$

したがって、式(27), (28), (29)より、衝突直前の速度($V_{BO} - V_{Ro}$)における等価衝突力 F_{mean} と対応する等価復元ばね K_{GB} との関係は、以下のように与えられる。

$$F_{mean} = (V_{BO} - V_{Ro})(1 + e_{GB}) m_B^{1/2} K_{GB}^{1/2} / \pi (1 + m_B/M_r)^{1/2} \quad (30)$$

一方、実験的に求めたボール・ストリングス系の変位に対する復原力 F_{GB} (図4) および変位に対するばね剛性 K_{GB} (図5) の両非線形特性を最小二乗法により多項式近似し、変位を消去して復原力 F_{GB} と複合ばね剛性 K_{GB} の関係を数値的に求めて $F_{mean} = F_{GB}$ とおくと、以下のような形に表せる。

$$F_{mean} = f(K_{GB}) \quad (31)$$

式(30), (31)から、衝突前の速度が与えられると、 K_{GB} と F_{mean} が求まり、さらに、衝突時間 T_c も得られる⁽⁵⁾。

図9は、フォアハンド・ストローク実打における接触時間の実測値(5000コマ/秒)計算値を比較したものである。両者はよく一致している⁽⁵⁾。衝突における力積波形は、ラケットフレーム振動の振幅に影響するから、時間を t 、衝突力の最大値を F_{MAX} として実測波形に似た正弦半波に近似すると、数学的には以下のように記述できる。

$$F(t) = F_{max} \sin(\pi t / T_c) \quad (0 \leq t \leq T_c) \quad (32)$$

ただし、 $F_{max} = \pi F_{mean} / 2$ 。

式(32)のフーリエ・スペクトラム $S_F(f)$ は、振動数を f とすると、以下のように書ける。

$$S_F(f) = 2F_{max} T_c |\cos(\pi f T_c)| / [\pi |1 - (2f T_c)^2|] \quad (33)$$

図10は、標準的なゲージ、ストリング初張力 55 lb (246 N) のラケットのストリング面中心での衝突における力積波形の計算例であり、衝突速度は (a) 20 m/s, (b) 30 m/s の場合である。

ラケット振動特性は実験モード解析により同定し⁽⁹⁾⁻⁽¹²⁾、同定したラケット振動モデルのラケット面衝突位置に力積波形を適用すると、ラケット応答振動が予測できる。ラケット面上の衝突位置 j にインパクトの力積 $S_j (2\pi f_k)$ を適用すると、 i の位置における k 次振動モード成分の振幅 $X_{i,j,k}$ は以下のように書ける。

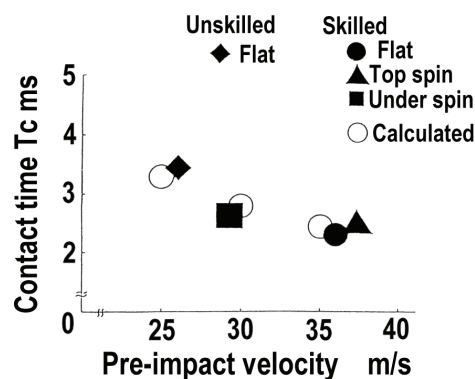


Fig.9 Comparison between the measured contact times during strokes and the calculated results.

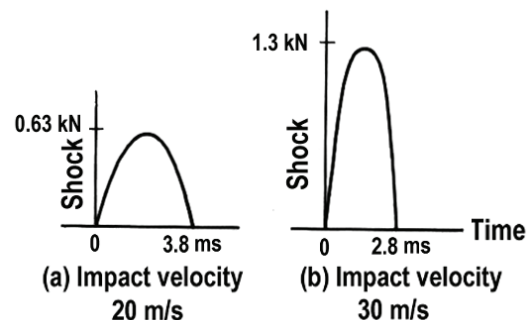


Fig.10 Calculated shock shape when a ball strikes the center on the String face at velocities of 20 m/s and 30 m/s.

$$X_{ijk} = r_{ijk} S_{Fj}(2\pi f_k) \quad (34)$$

ただし, r_{ijk} は任意の点 i と j の間の k 次振動モードの留数, $S_j(2\pi f_k)$ は k 次振動数 f_k の衝突力成分である. ボールとストリング面は衝突位置の 4 つ (四辺形) のストリング交差点で接触するとして同定する⁽¹²⁾.

インパクトにより励起されるラケット振動によるエネルギー損失は, ラケットフレームの振動速度振幅分布と質量分布から算出することができる. ボールとラケットの反発係数 e_r (COR) はラケット振動によるエネルギー損失 E_1 と反発係数 e_{BG} に対応するボールとストリングスの大変形によるエネルギー損失 E_2 を考慮することにより算出することができる.

ボールが静止ラケット ($V_{Ro} = 0$) に衝突する場合は, 全エネルギー損失 $E (= E_1 + E_2)$ に対応する反発係数 e_r は以下のよう書ける.

$$e_r = (V_R - V_B) / V_{Bo} = [1 - 2E / (m_B + M_r) (m_B M_r V_{Bo}^2)]^{1/2} \quad (35)$$

減衰係数 C_{GB} は最終的にはボールとラケットの反発係数 e_r から導かれる. したがって, ラケットフレームの振動を考慮したボールとラケットの力積波形は以下のように近似することができる. 衝突力 $F(t)$ は, 図 1 の衝突力 S_0 に相当する.

$$S_0(t) = F(t) = F_{max} \sin(\pi t / T_c) \quad (0 \leq t \leq T_c) \quad (36)$$

ただし,

$$F_{max} = (\pi / (2T_c))(V_{Bo} - V_{Ro})(1 + e_r)m_B / (1 + m_B/M_r) \quad (37)$$

衝突直後のボール速度 V_B は以下のように表すことができる.

$$V_B = -V_{Bo} (e_r - m_B/M_r) / (1 + m_B/M_r) + V_{Ro} (1 + e_r) / (1 + m_B/M_r) \quad (38)$$

したがって, ボールが静止している宙吊りラケット ($V_{Ro} = 0$) に衝突した場合, ボールの入射速度に対する跳ね返り速度の比 e は, 次式のように表すことができる. この比 e は, メーカーでラケットの反発性能を実験的に評価するのに用いられる係数であり, 著者は反発係数と区別して反発力係数 (the rebound power coefficient) と定義している.

$$e = -V_B / V_{Bo} = (e_r - m_B/M_r) / (1 + m_B/M_r) \quad (39)$$

ラケットヘッド速度 V_{Ro} でプレーヤーがボールを打撃する場合は, 反発力係数 e は以下のように表すことができる.

$$e = -(V_B - V_{Ro}) / (V_{Bo} - V_{Ro}) \quad (40)$$

図 11 はボールが自由宙吊り状態のラケットに速度 30 [m/s] で衝突する場合の反発力係数 e の予測結果と実測結果の比較である. 両者はよく一致している^{(4),(6)}.

プレーヤーがボールを打撃する場合のラケットのパワーは衝突直後のボールの速度 (打球速度) V_B で評価され, ボール速度 V_B は次式で表すことができる. ラケット速度 V_{Ro} は $L_X (\pi N_s / I_s)^{1/2}$ で与えられる. ただし, L_X はプレーヤーの肩関節とストリング面の衝突位置との距離, N_s は肩関節周りの一定トルク, I_s は肩関節周りのラケット・腕系の慣性モーメントである. 図 12 はフォアハンドグランドストロークを想定したきわめてシンプルなスイングモデルである^{(9),(10)}.

$$V_B = -V_{Bo} e + V_{Ro} (1 + e) \quad (41)$$

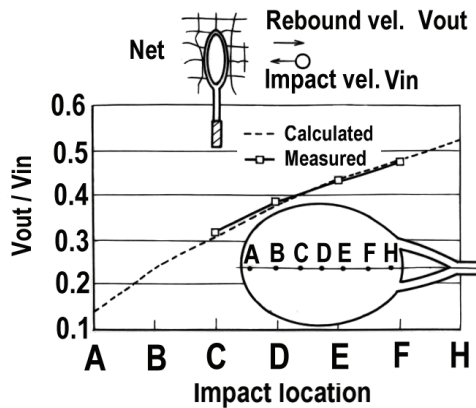


Fig. 11 Comparison between the measured rebound power coefficient e and the predicted one ($V_B = V_{out}$, $V_{BO} = V_{in}$, $V_{Ro} = 0$).

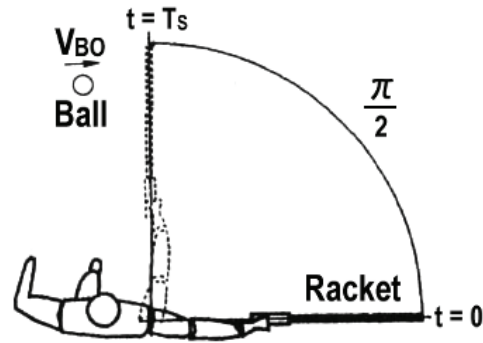


Fig. 12 Forehand stroke model

4. インパクトにおいて腕系に伝達される衝撃加速度の予測法

簡単のために、ボールが宙吊りラケットに衝突するとき($V_{Ro} = 0$), 腕系の等価質量 M_H を考慮すると、手の握りの位置の衝撃加速度 $A_{mv}(t)$ は、

$$S_0(t) = (M_R + M_H)(dV_G/dt), \quad S_0(t)a = I_G(d\omega/dt), \quad dV_1/dt = (dV_G/dt) - X(d\omega/dt)$$

から次式のように表すことができる。

$$A_{mv}(t) = dV_1/dt = S_0(t) [1/(M_R + M_H) - (a/I_G)X] \quad (42)$$

ここで、 X はプレーヤーの手の握りの位置とラケット・腕系の重心との距離、 a はラケット・腕系の重心とストリング面のボール衝突位置との距離、 I_G はラケット・腕系の重心周りの慣性モーメントである。手首関節に伝わる最大衝撃力 $S_{I_{max}}$ はストリング面の最大衝突力 $S_{0_{max}}$ に対応する。

5. ラケットハンドルと手首関節の振動加速度成分の予測法

自由な宙吊りラケットと比べると、手で支えたラケットは、ラケットの固有振動数がわずかに低減し、1次の2節曲げ固有振動のハンドル上の節の位置が手の握りの位置の方向にいくらかシフトする。さらに、自由な宙吊りラケットと比べると、手で支えたラケットの振動減衰は著しく増大する。しかし、両者のラケットフレームの初期振動振幅分布には大きな違いがない。ラケットハンドルあるいは手首関節位置 i における k 次振動モード成分 $X_{ij,k}(t)$ は以下のように表すことができる。

$$X_{ij,k}(t) = r_{ijk} S_{0j}(2\pi f_k) \exp(-2\pi f_k \zeta_k t) \sin(2\pi f_k t)$$

したがって、ラケットハンドルあるいは手首関節位置 i における振動加速度の k 次モード成分 $A_{ij,k}(t)$ は以下のように表すことができる。

$$A_{ij,k}(t) = -(2\pi f_k)^2 r_{ijk} S_{0j}(2\pi f_k) \exp(-2\pi f_k \zeta_k t) \sin(2\pi f_k t) \quad (43)$$

ただし、 j はストリング面上のボールとの衝突位置、 ζ_k は手持ちラケットの k 次モード成分の減衰比 ζ_{H1} または手首関節の減衰比 ζ_{W1} であり、 $S_{0j}(2\pi f_k)$ は式(36)のフーリエスペクトラムである。式(42)と式(43)の和がラケットハンドルまたは手首関節の衝撃振動加速度を表す。

図 13 は上級プレーヤーがフォアハンド・ストローク（フラット）でボールを打撃する実験風景であり，図 14 は手首関節，肘関節に装着した圧電型加速度計の取り付け位置を示す写真である（ラケットハンドル部は省略）．図 15 はラケット・腕系の重心 G とラケットの重心 G_0 の例である．

図 16 は手首関節の衝撃振動加速度の予測結果をフォアハンドストロークにおける実測結果と比較したものであり，ストリング面のボールとの衝突位置は先端側であり，衝突速度は 30 m/s である．衝撃振動加速度は式(42)および式(43)を用い，衝撃成分とフレームの 2 節曲げ，3 節曲げ，2 節ねじり，ストリング面膜振動 1 次の 4 つの振動モード成分を考慮している．この場合のラケットは，材料：グラファイト 75 %，ファイバークラス 20 %，その他 5 %，全長：685 mm，フェース面積：100 in² である．ストリングを含む質量：342 g，ハンドル端から重心までの距離：310 mm，重心周りの慣性モーメント：14.2 gm²，ストリング・テンション（張りあがり張力）：60 lbs. である．ラケット・腕系の重心位置はハンドル端から 131 mm にシフトしている．図 16 における最初の大きなピークはインパクトにおける衝撃と初期振動によるものであり，その後には続くのはフレームの残留振動である．衝撃振動はボールとのインパクトによる衝撃成分とフレームの振動モード成分からなり，それぞれの成分は，衝突速度，ストリング面の衝突位置，ラケットハンドルの握りの位置，ラケットの物理特性に依存して，それぞれの時系列と大きさをもつ．実験的同定結果によると，実際のテニスのインパクトにおける手持ちラケットの減衰比 ζ_{H1} は実験モード解析における小振幅振動の減衰比（1 次振動モードの場合： $\zeta_{F1}=0.024$ ）の 2.5 倍であった．さらに，手首関節波形の減衰比 ζ_{W1} は手持ちのラケットハンドルの 3.0 倍であった．手首関節の衝撃振動の予測波形は，プレーヤーによる実際のフォアハンド打撃における実測波形の特徴をかなりよく表している．

プレーヤーの体重と身長はそれぞれ 60 kgw, 170 cm を想定しており，その場合のハンドル部に換算したプレーヤーの換算質量 M_H は 0.97 kg, 約 1.0 kg である．

なお，プレーヤーが手で支えたラケットの反発力係数 e ($= -V_B / V_{B0}$) がハンドル部に換算したプレーヤーの質量を付加したラケットの場合の反発力係数 e とほぼ一致することが実験的に確認されている⁽¹³⁾．



Fig. 13 Experiment where a male player hits flat forehand drive

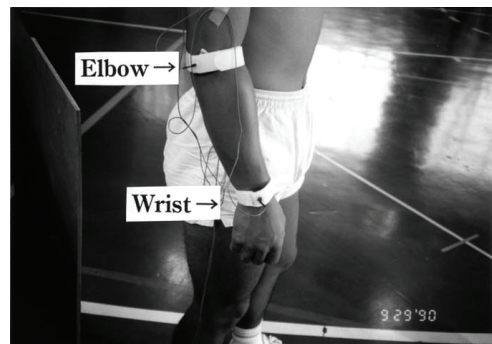


Fig. 14 Accelerometers attached at the wrist and the elbow.

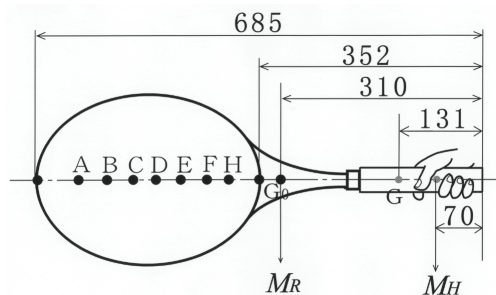


Fig.15 Center of gravity in a racket-arm system (Racket:IMP-3)

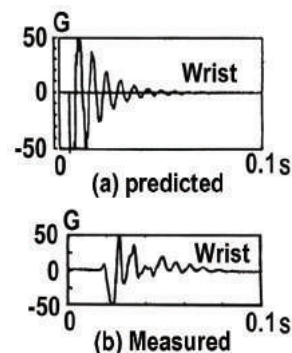


Fig.16 Predicted shock vibrations of a wrist joint compared with the experimental.

6. 超大型ヘッドをもつ従来重量型ラケットと現代軽量型ラケットの手首衝撃振動予測結果の比較

6.1 テニスラケット物理特性の比較

図 17 は超大型ヘッドサイズ 120 in² のカーボングラファイト製ラケットを示す. 表 1 は, 従来重量型ラケット EOS120H と現代軽量型ラケット EOS120A の物理特性実測値を示す. ただし, I_{GY} は 重心周りの慣性モーメント, I_{GR} はハンドル端から 70 mm の握りの位置周りの慣性モーメント, I_{GX} はラケット面長軸周りの慣性モーメントである. ラケット EOS120A (市販品) は, 代表的な軽量型バランスのラケットであり, スtring を含む質量 292 g, ハンドル端から重心位置までの距離 363 mm であり, ラケット EOS120H (試作品) は, 代表的な従来重量型バランスのラケットであり, String を含む質量 349 g, ハンドル端から重心位置までの距離 323 mm である. 両ラケットの材料および幾何学的形状はほぼ等しい.

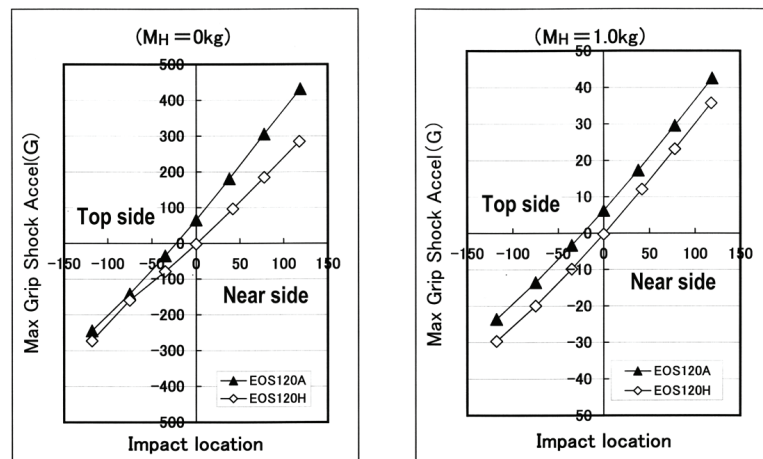
図 18 は, ボールがラケット長軸線上のいろいろな位置に衝突したときのハンドル部握りの位置の最大衝撃加速度予測値であり, (a) 自由な宙吊りラケット, (b) 手持ちラケット ($M_H = 1.0$ kg) の場合である. 両ラケットの差異は大きくはないが, プレーヤーのハンドル部に換算した質量は, 両ラケットの手首関節の衝撃加速度を著しく低減させる.

Table 1 Physical properties of rackets

Racket	EOS120H	EOS120A
Face area	120 in ²	120 in ²
Total length	27 in (685 mm)	27 in (690 mm)
Mass (+Strings)	349 g	292 g
Center of Gravity	323 mm	363 mm
I_{GY}	16.0 g·m ²	14.0 g·m ²
I_{GR}	38.0 g·m ²	39.0 g·m ²
I_{GX}	2.21 g·m ²	1.78 g·m ²
1st freq	142 Hz	137 Hz
Strings tension	79 lbs	79 lbs
Reduced mass	205 g	206 g



Fig.17 Super-large sized racket with a head size of 120 square inches.



(a) a freely suspended racket

(b) a hand-held racket.

Fig.18 Predicted maximum shock acceleration at the grip: impact velocity 30 [m/s].

6.2 ラケットハンドルの初期振動振幅の比較

図 19 は, ボールがString面長軸上の各打点 B,D,F および先端側打点 B, 中心打点 D, 根元側打点 F それぞれの横方向の打点に衝突したときのハンドル端から 70 mm の距離にある握りの位置の振動加速度振幅成分予測値 (全振幅最大値, $G:9.8$ m/s²) を示す. 自由な宙吊りラケットの 4 つの振動モードを考慮している. 従来重量型ラケット EOS120H に比べて, 軽量型ラケット EOS120A の振動加速度が著しく大きい. その理由は, 図 20 の 1 次 2 節曲げ振動モード図において, 従来重量型ラケットのハンドル上の節の位置がハンドル端から 0.14L であるのに対して, 軽量型ラケットは 0.27L であり, 標準的な握りの位置 0.10L (70 mm) から離れているからである. また, 従来重量型のスイートエリアがString面全体に広いのに対して, 軽量型のスイートスポットが中心から先端側寄り 30 mm の狭い点にあるのが特徴的である.

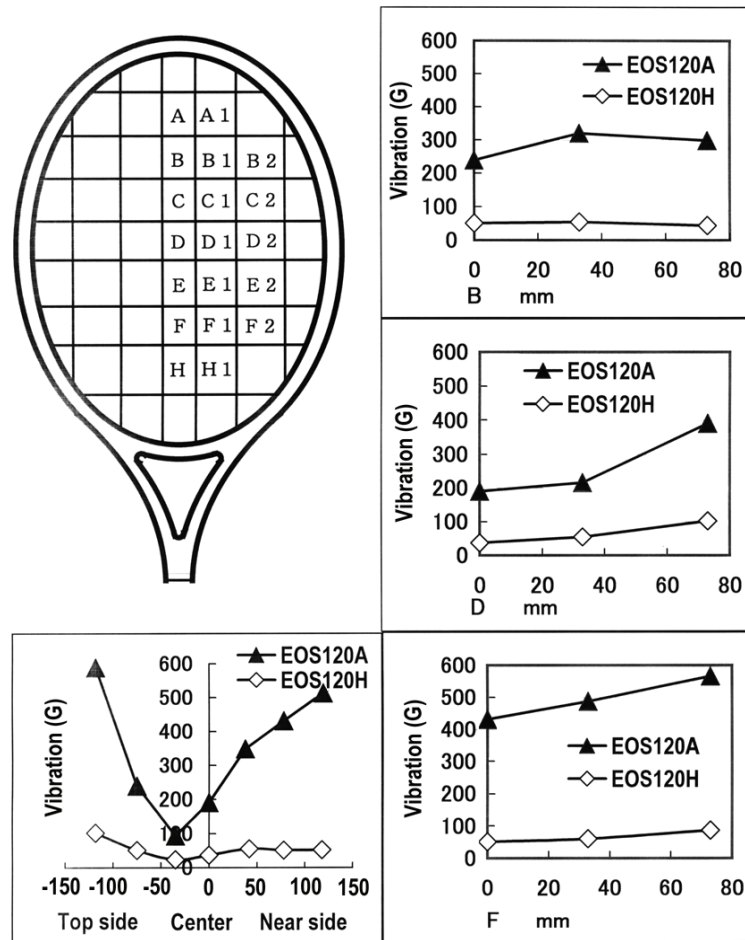
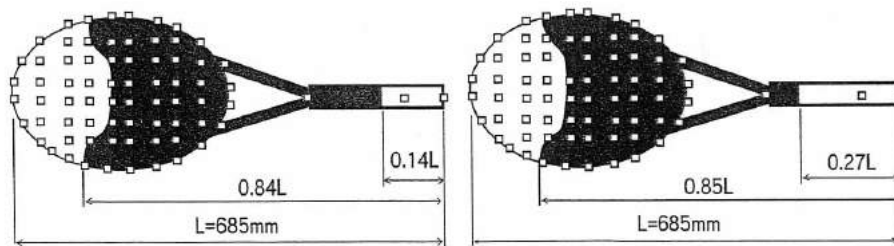


Fig. 19 Predicted maximum peak-peak vibration amplitudes components at the grip (impact velocity: 30 m/s) when a ball strikes the various locations on the string face of freely suspended rackets along the longitudinal axis and along the short axes at the topside B, center D and nearside F, where the four vibration modes of freely suspended rackets are considered.



(a) EOS120H: Conventional weight distribution (349 g) (b) EOS120A: Super-light top heavy (292 g)

Fig.20 Locations of vibration node on the racket handle of the 1st mode of two tennis rackets.

6.3 ラケットハンドルの衝撃振動波形の予測結果の比較

図 21 は、ボールがストリング面長軸上の各打点 B,D,F および先端側打点 B, 中心打点 D, 根元側打点 F それぞれの横方向の打点に衝突したときのハンドル端から 70 mm の距離にある握りの位置の衝撃振動加速度波形の予測結果 ($G: 9.8 \text{ m/s}^2$) を示す。衝突速度は 30 m/s であり、自由な宙吊りラケットの衝撃成分と 4 つの振動モード成分を考慮している。従来重量型ラケット EOS120H の場合(a)に比べて、軽量型ラケット EOS120A の場合(b)の衝撃振動加速度が著しく大きい。

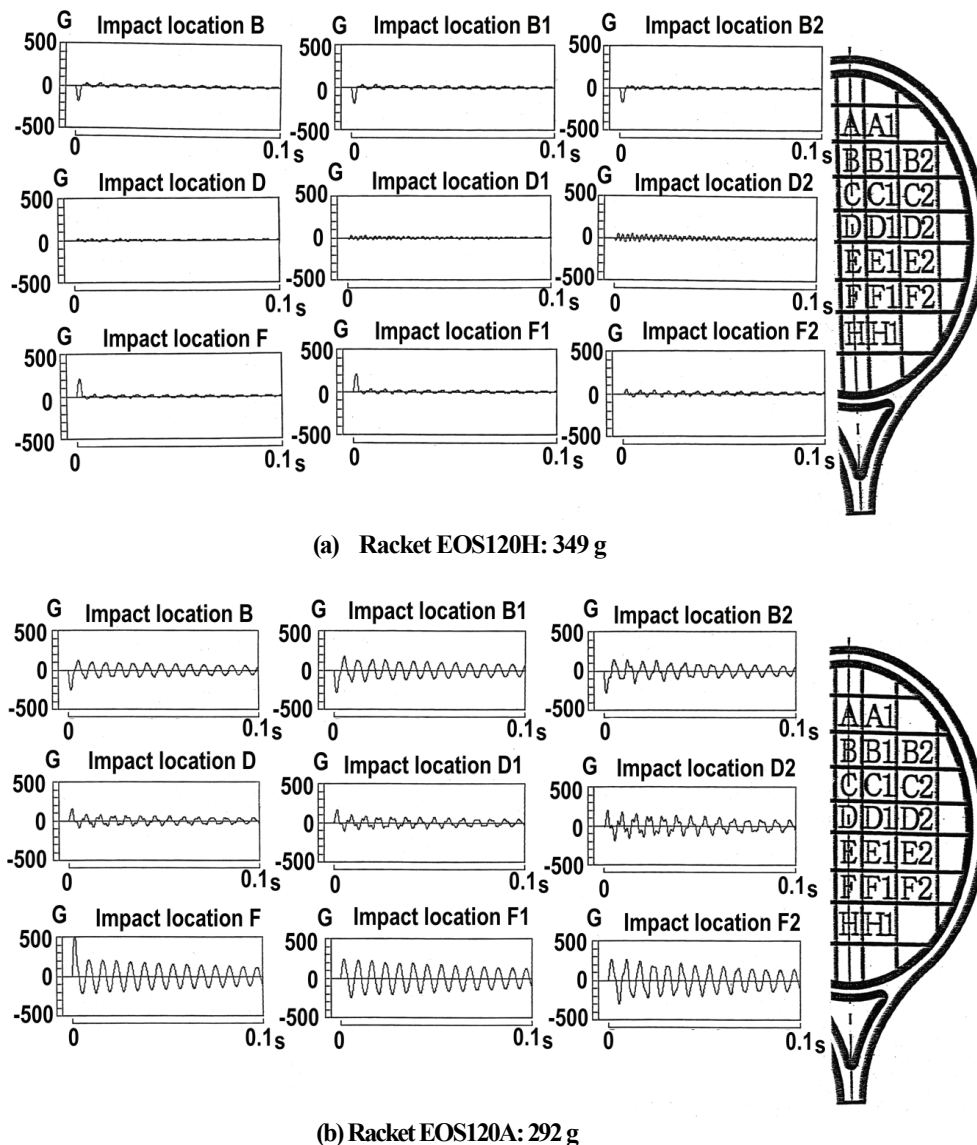


Fig.21 Predicted waveform of the shock vibrations at the racket handle on comparing the two freely-suspended rackets with different weight and weight balance when a ball strikes the various locations on the string face along the longitudinal axis and along the short axes at the topside B, center D and nearside F, where the four vibration modes of freely suspended rackets and the shock component due to ball-racket impact are considered. The impact velocity between the ball and the racket is 30 m/s.

6.4 手首関節の衝撃振動波形の予測結果の比較

プレーヤーの手首関節の衝撃振動波形の予測結果は、図 16 に示したように、プレーヤーが実際にフォアハンドストロークでボールを打撃したときの実測波形の特徴をかなりよく表している⁽²⁾⁽¹¹⁾。

図 22 は、ボールがストリング面長軸上の各打点 B,D,F および先端側打点 B, 中心打点 D, 根元側打点 F それぞれの横方向の打点に衝突したときのプレーヤーの手首関節の衝撃振動加速度波形の予測結果 ($G:9.8 \text{ m/s}^2$) を示す。衝突速度は 30 m/s であり、手で支えたラケットの衝撃成分と 4 つの振動モード成分を考慮している。実際のテニスのインパクトにおける手持ちラケットの実験的同定による減衰比 ζ_{H1} は、実験モード解析における小振幅振動の減衰比(1 次振動モードの場合)の約 2.5 倍であり、プレーヤーの手首関節波形の実験的同定による減衰比 ζ_{W1} は手持ちのラケットハンドル減衰比の 3.0 倍であるとして予測した。従来重量型ラケット EOS120H の場合(a)に比べて、軽量型ラケット EOS120A の場合(b)の手首関節の衝撃振動加速度は著しく大きい。超大型ヘッドの従来重量型ラケットの打球感が心地良いと推測されるのに対して、超大型ヘッドの軽量型ラケットの打球感は心地よいとは言えないと推測される。

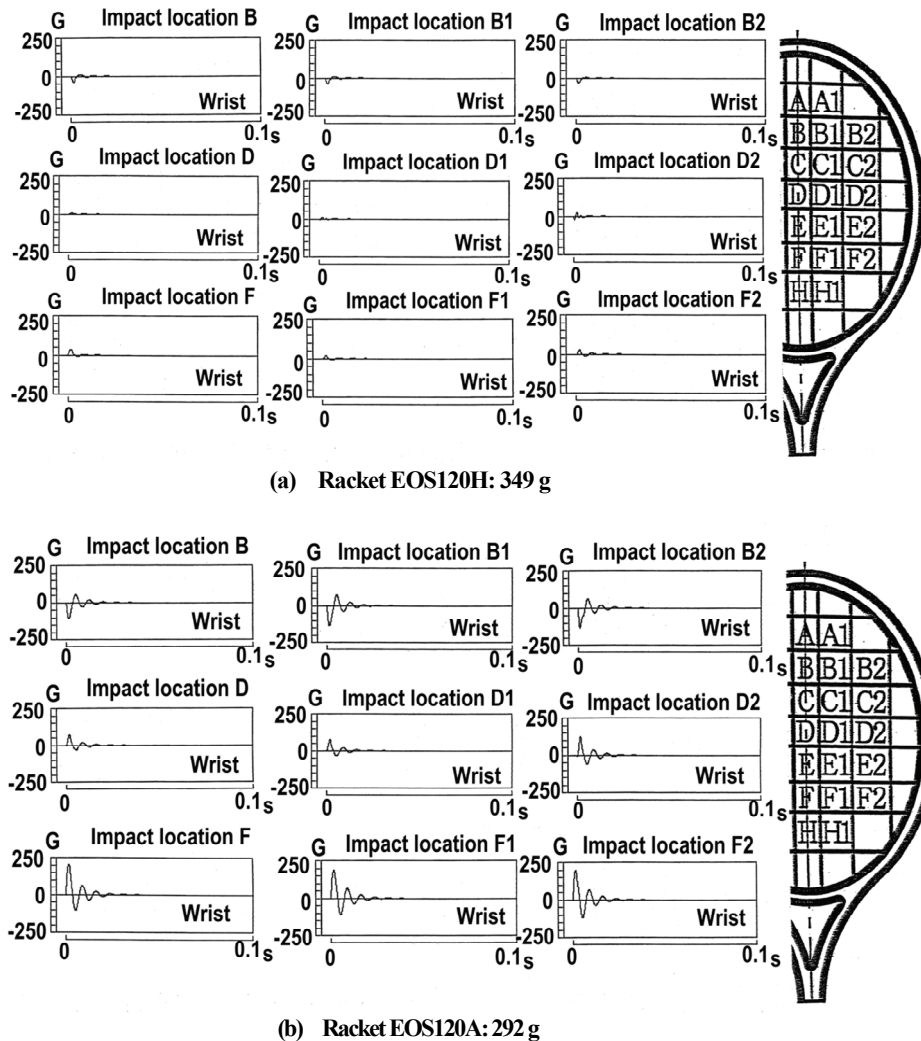


Fig.22 Predicted waveform of the shock vibrations of the player's wrist joint on comparing the two rackets with different weight and weight balance when a ball strikes the various locations on the string face along the longitudinal axis and along the short axes at the topside B, center D and nearside F, where the four vibration modes of hand-held rackets and the shock component due to ball-racket impact are considered.

7. 結 論

ハンドル部分の重量を減らしてトップヘビーにすることにより反発性を低下させないで軽量化をはかり、操作性の改善によりスイング速度を上げることにによりパワーを増し、ヘッドの大型化によりスピン（回転数）を増してコントロール性を改善するというのが最近のハイテク・ラケットの特長である。

本論文では、超大型ヘッドをもつ軽量型ハイテク・ラケットの打球感に関する性能を明らかにするために、実験的同定に基づいてプレーヤーの手首関節衝撃振動を予測する一般的な方法を示し、プレーヤーがフォアハンドドライブでボールをフラットに打撃するとき、ラケットの質量および質量分布がハンドルとプレーヤーの手首関節衝撃振動におよぼす影響について適用した。この予測法は、テニスのインパクトにおけるラケット特性、ラケットー腕系の減衰特性、プレーヤーの腕系等価質量などの同定と近似非線形解析に基づいている。材料および幾何学的形状の等しいカーボングラファイト製、ヘッド面積 120 in^2 のラケットについて、代表的な従来重量型はストリングを含む質量 349 g 、ハンドル端から重心位置までの距離 323 mm とし、代表的な軽量型はストリングを含む質量 292 g 、ハンドル端から重心位置までの距離 363 mm を対象とした。結論を要約すると以下のようになる。

- (1) 超大型ヘッド従来重量型バランスのラケットに比べて、超大型ヘッド軽量型バランスのテニスラケットは、ラケットハンドルの握りの位置および手首関節の衝撃振動が著しく大きい。
- (2) この理由は、1次2節曲げ振動モード（基本振動）に関して、従来重量型バランスラケットのハンドル上の節の位置が、標準的な握りの位置がハンドル端から0.10L (70 mm)であるのに対して、ハンドル端から0.14Lであるのに対して、軽量型バランスのラケットは0.27Lと握りの位置から離れているからである。
- (3) 超大型ヘッド従来重量型バランスのラケットの衝撃振動に関するスイートエリアがストリング面全体に広いのに対して、軽量型バランスのスイートスポットが中心から先端側寄り30 mmの狭い点にある。
- (4) プレーヤーの手首衝撃振動加速度の予測結果に基づく、超大型ヘッドの従来重量型バランスラケットの打球感は心地良いと推測されるのに対して、超大型ヘッドの軽量型バランスラケットの打球感は心地よいとは言えないと推測される。

謝 辞

著者の一人は、テニスラケットの研究を始めた頃より長年に渡って棚橋応用力学研究所・棚橋良次博士（元ヤマハ㈱スポーツ事業部）にご討論いただき、多くの貴重なアドバイスや励ましをいただいた。厚くお礼申し上げる。また、卒業研究として実験や図表作成にご助力いただいた年々の学生諸君にも深謝する。

文 献

- (1) Casolo, F. & Ruggieri, G., “ Dynamic analysis of the ball-racket impact in the game of tennis “ , *Meccanica* , Vol.24 (1991), pp.501- 504.
- (2) Kawazoe, Y., Tomosue, R., Yoshinari, K. and Casolo, F., “ Study on the Feel of Tennis Racket at Impact: Mechanism of Impact Shock Vibrations of a Racket Grip and a Player's Wrist Joint “ , *JSME D&D2000*, CD-Rom, (2000), pp.1-6.
- (3) Kawazoe, Y., “Dynamics and computer aided design of tennis racket “ , *Proc. Int. Sympo. on Advanced Computers for Dynamics and Design'89*, (1989), pp.243-248.
- (4) Kawazoe, Y., “ Experimental Identification of Hand-held Tennis Racket Characteristics and Prediction of Rebound Ball Velocity at Impact “ , *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.46 (1997), pp.165-176.
- (5) Kawazoe, Y., “ Coefficient of restitution between a ball and a tennis racket “ , *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.42 (1993), pp.197-208.
- (6) Kawazoe, Y., “Impact phenomena between racket and ball during tennis stroke“, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.41 (1992), pp.3-13.
- (7) Kawazoe, Y., “ Effects of String Pre-tension on Impact between Ball and Racket in Tennis “ , *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.43 (1994), pp.223-232.
- (8) Kawazoe, Y., “ Computer Aided Prediction of the Vibration and Rebound Velocity Characteristics of Tennis Rackets with Various Physical Properties “ , *Science and Racket Sports*, E & FN SPON. (1994), pp.134-139.
- (9) Kawazoe, Y., “ Performance Prediction of Tennis Rackets with Materials of the Wood and the Modern Composites “ , *5th Japan Int. SAMPE Sympo. & Exhibition*, (1997) , pp.1323-1328.
- (10) Kawazoe, Y. and Kanda, Y., “ Analysis of impact phenomena in a tennis ball-racket system (Effects of frame vibrations and optimum racket design) “ , *JSME International Journal, Series C*, Vol.40, No.1 (1997), pp.9-16.
- (11) Kawazoe, Y., Tomosue, R. & Miura, A., “ Impact shock vibrations of the wrist and the elbow in the tennis forehand drive: remarks on the measured wave forms considering the racket physical properties “ , *Proc. of Int. Conf. on New Frontiers in Biomechanical Engineering*, (1997), pp.285-288.
- (12) Kawazoe, Y., TAKEDA, Y. and NAKAGAWA, M., “ Performance Prediction of Active Piezo Fiber Rackets in Terms of Tennis Power “ , *Journal of System Design and Dynamics*, Vol.4, No.1 (2010), pp.77-90.
- (13) Casolo, F., Lorenzi, V. and Sasahara, H., “ On tennis equipment, impact, simulation and stroke precision “ , *Tennis Science and Technology*, Blackwell Science, (2000), pp.83-90.