

テニスのインパクトにおけるラケットのスイートエリアの予測*

(反発係数, 反発力, ボールの飛び)

川 副 嘉 彦*¹, 友 末 亮 三*²

Prediction of a Sweet Area on a Racket Face in a Tennis Impact (Restitution Coefficient, Rebound Power Coefficient and Ball Post-Impact Velocity)

Yoshihiko KAWAZOE and Ryoso TOMOSUE

The term sweet area is used in describing that region of a tennis racket where the ball should be hit for optimum results. There are several definitions of this term, each one based on different physical phenomenon, and also a number of unclarified points with the confusion. This paper predicts the racket performance in tennis in terms of the region on the racket face where the ball post-impact velocity is above some arbitrary value, when a ball is struck by a player. It is based on the experimental identification and impact analysis of the ball-racket system, clarifying the mechanism of the ball post-impact velocity in relation to restitution coefficient, rebound power coefficient, and racket head velocity.

Key Words: Dynamics of Machinery, Sports Engineering, Tennis Racket, Impact, Sweet Area, Restitution Coefficient, Rebound Power Coefficient, Swing Model, Post-Impact Velocity

1. 緒 言

ラケットの進歩がテニスの技術やプレイスタイルに影響してきたといわれている。しかし、現状では、ラケットの性能は使用して初めてわかるものであり、人間の評価が優先する。したがって、人間の身体的条件や技術的条件によってラケットに求められる物理特性は異なるということになり、ラケットの性能評価は経験の深いテスターやプレイヤーを介して行われてきた。

しかし、ラケットの性能評価に関するテストやプレイヤーの表現あるいは用語がどのような物理現象を意味しているのか、あるいはラケットの物理特性とどのように関係しているのかについては不明な点が多い。

ラケットの反発力がよい、あるいはボールの飛びがよいなどという表現やスイート・スポットあるいはスイート・エリアという表現も一般には不用意に使われている⁽¹⁾。

スイート・エリアという用語が、インパクト(ボールとラケットの衝突)において手に伝わる衝撃および

振動が小さい領域、ボールがストリングスから飛び出す速度が大きい領域、あるいは打球が安定する領域という意味であるとすれば、通常これらはラケット面の異なる領域に存在し、スイング速度でも異なるはずである。テスターの試打による評価などに基づいた各メーカー独自の定性的なスイートエリアの表示がカタログやテニス雑誌などにみられるが、客観的・定量的な評価とはいいい難く、物理特性との関係も明確ではない。

本研究では、ボールとラケットの実験的な同定と衝突解析により、反発係数およびボールの跳ね返りのよさを表す反発力係数を定義し、簡単なスイング・モデルを用いてボールの飛びのメカニズムを明らかにし、ボールの飛びのよい打点領域を予測する方法と予測例を示す。

2. 反発係数, 反発力係数, ボールの飛びに関するスイートエリアの予測法

2・1 近似非線形衝突解析の概要⁽²⁾ ボールとラケットの衝突の中身は、ボールとストリングスの大変形とフレームの振動からなる非線形力学であり、厳密な解析は難しい。本論文では、ボールとラケットの接触時間が、フレーム剛性あるいはフレーム振動にほとんど依存しないことに着目して、ボールとストリング

* 原稿受付 1997年6月23日。

^{*1} 埼玉工業大学工学部(☎369-0293 埼玉県大里郡岡部町普濟寺1690)。

^{*2} (財)スポーツ医・科学研究所(☎470-2212 愛知県知多郡阿久比町卯坂49)。

スの瞬間的な大変形は非線形系として、振動振幅の比較的小さなフレームの挙動は線形系として扱い、剛体運動成分と振動成分とを分離して考える。

ボールとラケットの反発係数は衝突におけるエネルギー損失と密接に関係しており、ボールとストリングスの瞬間的な大変形によるエネルギー損失とフレームの振動によるエネルギー損失がおもなものである。ボールとストリングスのエネルギー損失は、ストリングス周辺のリケット・ヘッドを固定してボールを衝突させたときの反発係数実測値 e_{BG} から求めることにし、ラケット・フレームの振動によるエネルギー損失は、実験的に同定したラケットの振動特性と衝突力の予測波形から導くことにする。

2・2 打点に換算した腕・ラケット系の質量 ラケット単体の質量を M_R 、長手方向に直交し重心を通る軸まわり(長手方向と呼ぶ)の慣性モーメントを I_{C0} 、グリップ端から重心までの距離を L_{C0} 、重心と打点の距離を a_0 とし、グリップ端から L_H の握りの位置に腕系の等価質量 M_H を付加したときの重心の移動量を ΔG とすると、

$$\Delta G = (L_{C0} - L_H)M_H / (M_R + M_H) \quad \dots\dots\dots (1)$$

したがって、腕系の等価質量を付加したときの重心と打点の距離 a および重心周りの慣性モーメント I_G は以下ようになる。

$$a = a_0 + \Delta G = a_0 + (L_{C0} - L_H)M_H / (M_R + M_H) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$I_G = I_{C0} + M_R \cdot \Delta G^2 + M_H(L_{C0} - L_H - \Delta G)^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

いま、握りの位置に等価質量 M_H を付加した静止ラケットに質量 m_B のボールが速度 V_{B0} で正面衝突するときの剛体運動を考える。インパクトの瞬間(通常 3~5 ms)においてラケットは手の拘束力を受けないと仮定すると、等価質量 M_H を付加したラケットの並進運動の運動量および重心まわりの角運動量は、重心の速度を V_C 、角速度を Ω 、衝突の力積を S とすると、

$$(M_R + M_H) V_C = S \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$I_G \Omega = S \cdot a \quad \dots\dots\dots (5)$$

ラケットの衝突位置の衝突後の速度 V_R は

$$V_R = V_C + \Omega \cdot a \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(4)~(6)から V_C と Ω を消去すると、

$$V_R = S [1 / (M_R + M_H) + a^2 / I_G] \quad \dots\dots\dots (7)$$

あるいは、

$$S = V_R [1 / (M_R + M_H) + a^2 / I_G] \quad \dots\dots\dots (8)$$

したがって、ボールの運動量の変化は

$$m_B V_{B0} - m_B V_B = S = V_R [1 / (M_R + M_H) + a^2 / I_G] \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで

$$M_r = 1 / [1 / (M_R + M_H) + a^2 / I_G] = (M_R + M_H) I_G / [I_G + (M_R + M_H) a^2] \quad \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、式(9)は、

$$m_B V_{B0} = m_B V_B + M_r V_R \quad \dots\dots\dots (11)$$

と書ける。したがって、式(10)で表される M_r は、腕系の等価質量 M_H をグリップの握りの位置に付加したラケットの衝突位置に換算した質量とみなすことができる。

図1は、グリップ端から 70 mm の位置に腕系の等価質量として Casolo⁽³⁾ の値 $M_H = 1.0$ kg を付加したときの市販ラケットの重心位置の例を示す。ラケットは、全長 685 mm、打球面面積 $100 \text{ in}^2 \{645 \text{ cm}^2\}$ 、質量 342 g、重心はグリップ端から 310 mm、重心周りの慣性モーメント 0.0142 kgm^2 である。

図2は、上記のラケットについて、打点に換算したラケットの換算質量 M_r に及ぼす腕系の影響を示す。ラケットの握りの位置に付加した腕系の等価質量はラ

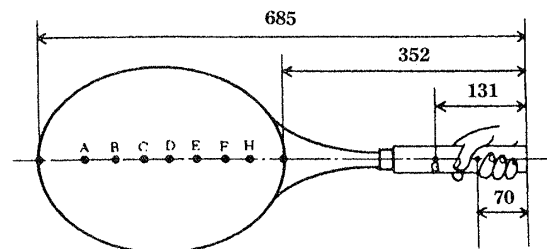


Fig. 1 Center of gravity in a racket-arm system ($M_H = 1.0$ kg)

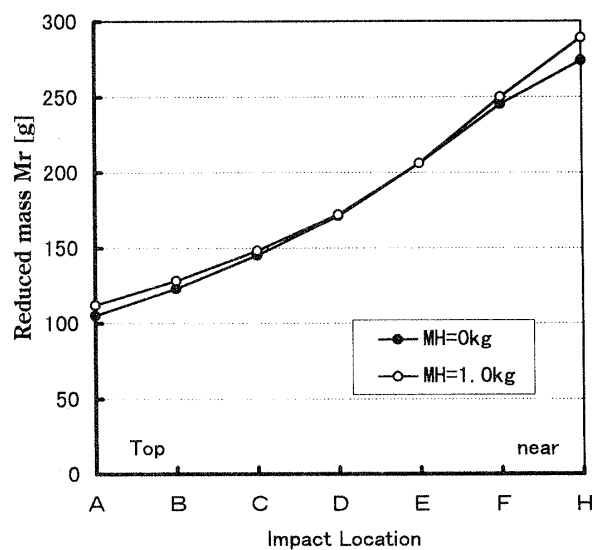


Fig. 2 Reduced mass at impact location of a racket-arm system compared with that of a racket without an arm

ケットの打点に換算した質量にはほとんど影響しない。ただし、グリップ部の衝撃には大きく影響する。

ラケット単体の換算質量 M_r は以下のように表せる。

$$M_r = 1/[1/M_R + a_0^2/I_{Go}] = M_R I_{Go} / [I_{Go} + M_R a_0^2] \dots\dots\dots (12)$$

打点がラケット面の根元側で横に大きくはずれた場合はラケットは長手方向軸まわりに回転するが、インパクトの瞬間にはグリップの拘束がないと仮定すると、この場合も同様に求めることができる。長手方向軸に直交する軸まわりに回転するときの換算質量と長手軸まわりに回転するときの換算質量の小さいほうを、オフセンタでのインパクトにおける換算質量とする。

2・3 衝突力波形の導出 反発係数は衝突におけるエネルギー損失と密接に関係する。ラケット・フレームの振動を求めるためにはラケットに作用する衝突力波形が必要であり、これは以下のように導ける⁽²⁾⁽⁴⁾。

ラケットの剛体運動を扱う代わりに上記の換算質量 M_r を導入し、ストリングス周辺のラケット・ヘッドを固定してボールを衝突させた場合の反発係数実測値 e_{BG} を用いると、運動量保存則と反発の式から、フレームの振動を無視したときの力積 $\int F(t)dt$ は、

$$\int F(t)dt = m_B V_{Bo} - m_B V_B \dots\dots\dots (13)$$

と書ける。ただし、ボールの衝突後の速度 V_B は、

$$V_B = -V_{Bo}(e_{BG} - m_B/M_r)/(1 + m_B/M_r) + V_{Ro}(1 + e_{BG})/(1 + m_B/M_r) \dots\dots\dots (14)$$

であり、 V_{Ro} 、 V_{Bo} はそれぞれ衝突直前のラケット・ヘッドの衝突位置での速度およびボール速度である。

ここで、ストリングスの質量はラケット質量 M_R に含めて、ボールおよびストリングスの非線形ばねを介してボールとラケットが衝突するモデルを考える。ボール・ストリングス複合系のばね剛性 dF/dX_{CB} (X_{CB} は複合ばねの変形量) は強い非線形だから、衝突速度と衝突位置が与えられた場合の接触時間を T_c として力積波形を

$$F(t) = F_{MAX} \sin(\pi t/T_c) \quad (0 \leq t \leq T_c) \dots\dots (15)$$

のように近似し、接触時間 T_c の間一定の等価的な衝突力 $F_{MEAN} (= 2F_{MAX}/\pi)$ とそれに対応する等価ばね剛性 K_{CB} を考えると、以下のような関係が成り立つ。

$$T_c = \pi m_B^{1/2} / [K_{CB}(1 + m_B/M_r)]^{1/2} \dots\dots\dots (16)$$

$$\int F(t)dt = F_{MEAN} \cdot T_c \dots\dots\dots (17)$$

式(13)、(14)、(16)、(17)から、衝突速度が与えられたときの F_{MEAN} とそれに対応する K_{CB} の関係は以下のようになる。

$$E_{MEAN}$$

$$= (V_{Bo} - V_{Ro})(1 + e_{BG})m_B^{1/2}K_{CB}^{1/2} / \{\pi(1 + m_B/M_r)^{1/2}\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 F_{MEAN} 、 K_{CB} は未知数である。

一方、実験的に求めたボール・ストリングス系の変位 X_{CB} に対する復原力 F および変位 X_{CB} に対するばね剛性 dF/dX_{CB} の両非線形特性を最小二乗法により多項式近似し、 X_{CB} を消去して復原力と複合ばね剛性 dF/dX_{CB} の関係を数値的に求めると、最小二乗法により以下のように表せる⁽²⁾。

$$F = \text{func.}(dF/dX_{CB}) \dots\dots\dots (19)$$

式(18)において、ボール・ストリングスの変形によるエネルギー損失は、係数 e_{BG} により考慮されているので、衝突力として復原力のみを考えればよい。したがって、衝突速度に対応する等価ばね剛性 K_{CB} と対応する衝突力 F_{MEAN} を式(19)の dF/dX_{CB} と F の代わりに用いて式(18)、(19)を連立させると、衝突速度が与えられたときの F_{MEAN} と K_{CB} が数値計算により求められ、さらに式(16)から接触時間 T_c も定まるから、衝突力の時刻歴を与える式(15)が定まる。すなわち、未知数 F_{MAX} 、 T_c 、 K_{CB} 、 F_{MEAN} は衝突速度に依存する非線形であり、衝突速度に対する T_c および F_{MAX} (あるいは F_{MEAN}) と K_{CB} を求める過程は非線形系として扱うが、その際荷重試験に基づいて最小二乗法により求めた近似多項式(19)の関係を満たすような F_{MEAN} と K_{CB} を繰返し計算により数値的に決定している。

2・4 ラケットの実験的同定と衝突による動的応答の予測 衝突力の時刻歴を与える式(15)のフーリエ・スペクトルを $S(f)$ (f : 振動数 Hz)、ラケットの k 次の固有振動モード(固有振動数 $\omega_k = 2\pi f_k$) に対するラケット面上の点 j における衝突力成分を $S_j(\omega_k)$ と表すと、ラケット上の点 i における初期応答振幅の k 次モード成分 X_{ijk} は、

$$X_{ijk} = r_{ijk} \times S_j(\omega_k) \dots\dots\dots (20)$$

と近似できる。ただし、 r_{ijk} : 任意の点 i と j の間の k 次の振動モードの留数である⁽⁶⁾。

2・5 反発係数、反発力係数に関するスイートエリアの予測 ストリングス面の任意の打点にボールが衝突したときのフレーム振動の初期速度振幅分布を式(20)から

$$V_{ijk} = 2\pi f_k \cdot r_{ijk} \times S_j(f_k) \dots\dots\dots (21)$$

のように求め、フレームの質量分布を与えれば、フレーム振動によるエネルギー損失 ΔE_1 を求めることができる。

また、ボールとストリングスの衝突によるエネルギー損失 ΔE_2 は以下のように求めることができる。

$$\Delta E_2 = [m_B V_{Bo}^2 - (m_B V_B^2 + M_r V_R^2)]/2$$

$$= [m_B \cdot M_r / (m_B + M_r)] \cdot (1 - e_{BG}^2) V_{Bo}^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

衝突における全エネルギー損失 ΔE は、

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

となり、これがボールとラケットの反発係数に対応する。

一方、反発係数を e_r として、質量 m_B のボールと換算質量 M_r の静止ラケット ($V_{Ro}=0$) との衝突を考えると、

$$\Delta E = [m_B V_{Bo}^2 - (m_B V_B^2 + M_r V_R^2)] / 2$$

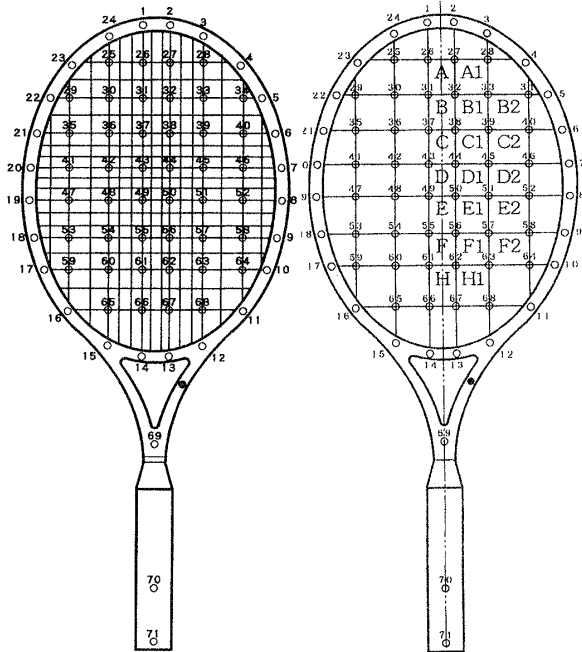


Fig. 3 String mesh and impact locations on the racket face

$$= [m_B \cdot M_r / (m_B + M_r)] \cdot (1 - e_r^2) V_{Bo}^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

の関係が成り立ち、式(23)を用いると、反発係数 e_r は以下のように求めることができる⁽⁴⁾。

$$e_r = [1 - 2 \cdot \Delta E \cdot (m_B + M_r) / (m_B \cdot M_r \cdot V_{Bo}^2)]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

したがって、ボールの衝突後の速度 V_B は、

$$V_B = -V_{Bo}(e_r - m_B/M_r) / (1 + m_B/M_r) + V_{Ro}(1 + e_r) / (1 + m_B/M_r) \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。

一方、静止ラケットにボールを衝突させたときのボールの跳ね返り速度 V_B と入射速度 V_{Bo} の比

$$e = -V_B / V_{Bo} \quad \dots\dots\dots (27)$$

を実測し、反発性能を評価することが多い。この係数 e は反発係数 e_r と誤解されやすいので、本論文では反発力係数と呼ぶことにする。 $V_{Ro}=0$ の場合、

$$V_B = -V_{Bo}(e_r - m_B/M_r) / (1 + m_B/M_r) \quad \dots\dots\dots (28)$$

となり、式(27)、(28)から、反発力係数 e は、

$$e = -V_B / V_{Bo} = (e_r - m_B/M_r) / (1 + m_B/M_r) \quad \dots\dots\dots (29)$$

と表せる。宙づりラケットの反発力係数の予測値と実測値の比較を前報⁽⁶⁾に示したが、ここでは式(26)の右辺の e_r に e_{BG} を使用していた。したがって、式(29)で与えられる値の方が精度がよいはずである。

2.6 ボールの飛び(打球速度)の予測 反発力係数 e を用いると、式(26)は

$$V_B = -V_{Bo}e + V_{Ro}(1 + e) \quad \dots\dots\dots (30)$$

と書ける。打球方向のボール速度は

$$|V_B| = |V_{Bo}|e + |V_{Ro}|(1 + e) \quad \dots\dots\dots (31)$$

と表せる。式(31)においてラケット速度 V_{Ro} を実際のスイングに近く与えてやれば、打撃直後のボール速

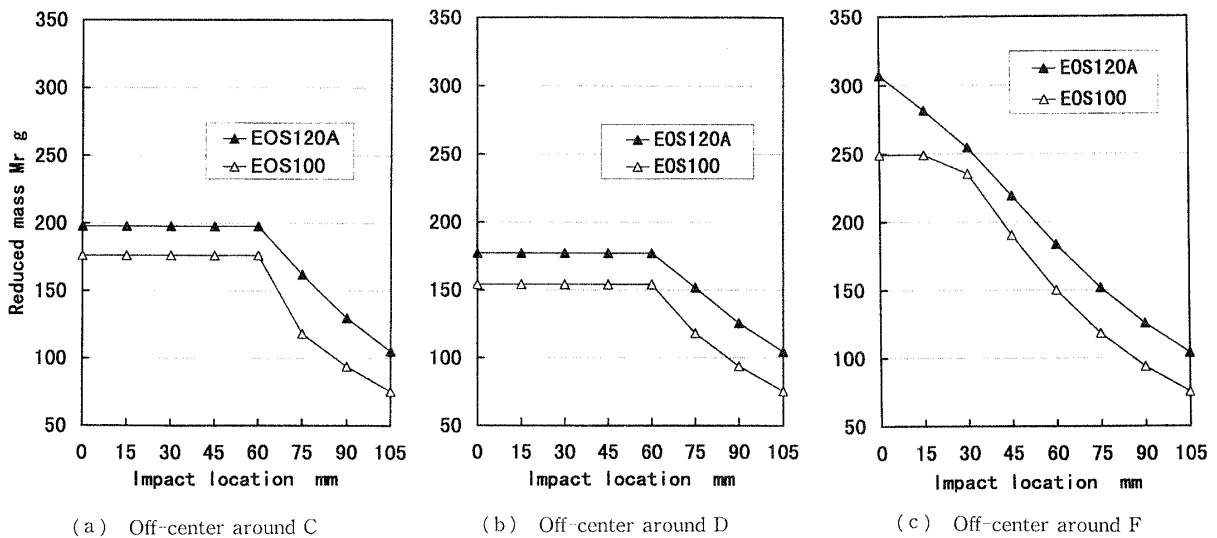


Fig. 4 Reduced mass M_r when a ball hits off the longitudinal axis of a racket face

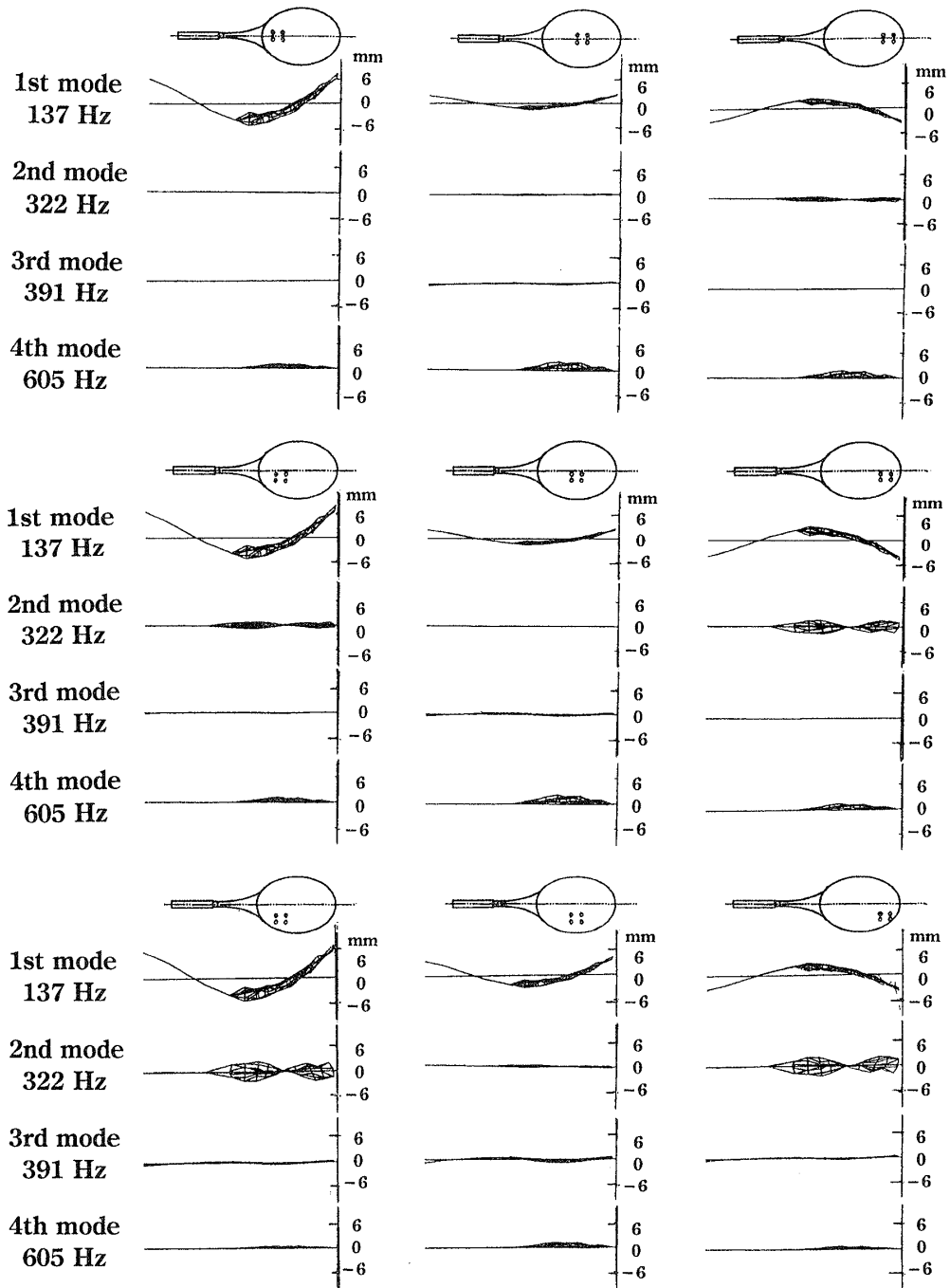


Fig. 5 Predicted initial amplitude of racket vibration component when a ball hits a racket at a velocity of 40 ms

度が予測できることになる。ここでは、手首と肘の関節角度を一定に保って肩関節だけに一定の回転トルク N_s を与え、腕・ラケット系が肩関節まわりに $\pi/2$ 回転したところでボールとラケットが衝突するようなスイング・モデルを考える。この場合、打撃直後のボール速度は以下のように導ける⁽⁷⁾。

いま、ラケットの質量を M_R 、重心まわりの慣性モーメントを I_G 、グリップ端から重心までの距離を L_G 、グリップ端から肩関節までの水平面に投影した距離を

L_{RS} とすると、ラケットの肩関節まわりの慣性モーメント I_{RS} は、

$$I_{RS} = I_G + M_R(L_{RS} + L_G)^2 \dots\dots\dots (32)$$

上腕、前腕、手の質量⁽⁷⁾ を考慮した腕系の肩関節まわりの慣性モーメントを I_A とすると、スイング動作における腕・ラケット系の肩関節まわりの慣性モーメント I_S は、

$$I_S = I_A + I_{RS} \dots\dots\dots (33)$$

さらに、肩関節からラケット面上の衝突位置までの距

離を L_x とすれば、腕・ラケット系が肩関節まわりに $\pi/2$ 回転したときの衝突位置のラケット速度 V_{Ro} は

$$V_{Ro} = L_x(\pi N_s / I_s)^{1/2} \dots\dots\dots (34)$$

となる。式(31)に衝突直前のボール速度 V_{Bo} と式(34)を代入すると、ストリング面の任意の位置での打球速度を予測することができる。

3. 反発係数, 反発力係数, ボールの飛びに関するスイート・エリアの予測結果

図3左は、ラケット面上のストリングスの編み目を示し、図3右はボールとの衝突を計算した位置 A~H 1 を示す。図4は、長手方向の中心線を外れたときのラケットの換算質量を示す。横軸は長手方向中心線からの距離を示し、サイズが異なるラケットについて中心線からの距離が同じ打点での換算質量の違いを比べたものである。ラケット EOS 120 A は、全長 690 mm, 打球面面積 120 in²(超大形サイズ, 774 cm²), 質量 292 g(超軽量), 重心まわりの慣性モーメント 14 gm², 長さ方向軸まわりの慣性モーメント 1.782 gm², 重心位置はグリップ端から 363 mm である。ラケット EOS 100 は、680 mm, 100 in²{645 cm²}, 290 g, 重心まわりの慣性モーメント 11.4 gm², 長さ方向軸まわりの慣性モーメント 1.121 gm², 重心位置は 350 mm である。ラケット EOS 120 A は EOS 100 に比べて、重心周りの慣性モーメントが 23%, 長さ方向軸まわりのそれは 59% 大きい。長さ方向の中心線から大

きく外れたときの換算質量は、中心線から約 70 mm では、30~40% ほど EOS 120 A のほうが大きい。ただし、ボールとの衝突を計算した図3の打点 D 2 の中心(EOS 120 A では 80 mm, EOS 100 では 68 mm の位置)では 8% 程度であり、衝突力は 2% 程度大きくなる。

図5は、ラケット面の各位置でボールと衝突したときの EOS 120 A の振動の初期変位振幅の予測例であり、フレームの二節曲げ、二節ねじり、三節曲げ、ストリングスの1次の膜振動の成分を示す。衝突速度は 40 ms である。オフセンタではフレームの二節曲げと二節ねじり成分が大きい。二節ねじり成分は二節曲げ成分より振動数が高いので、振幅が大きい衝突位置では、フレーム振動によるエネルギー損失の割合が大きく、反発係数が低下することになる。

図6と7は、それぞれ、衝突速度が 40 ms の場合の反発係数 e_r および反発力係数 e の予測例であり、ラケットは EOS 120 A である。反発係数 e_r は、二節曲げ振動の節の位置で高い値を示し、二節曲げ振動と二節ねじり振動の腹の位置で低下する。反発力係数 e は、長手方向の中心線上の根元側で高い値を示し、この中心線上の先端側およびこの中心線上から大きく外れた位置で低い値を示す。特に根元側において長手方向の中心線から外れるときに e の値は大きく低下する。これは、反発係数 e_r が低下するとともに、ラケットが長手方向軸まわりに回転するからである。

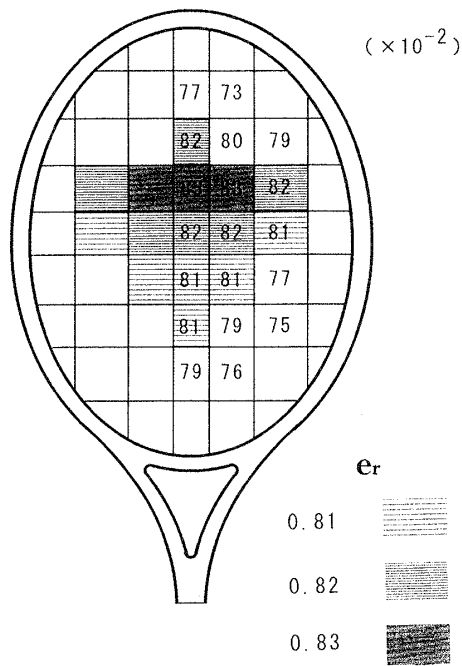


Fig. 6 Restitution coefficient e_r ($V_{Bo} - V_{Ro} = 40$ ms)

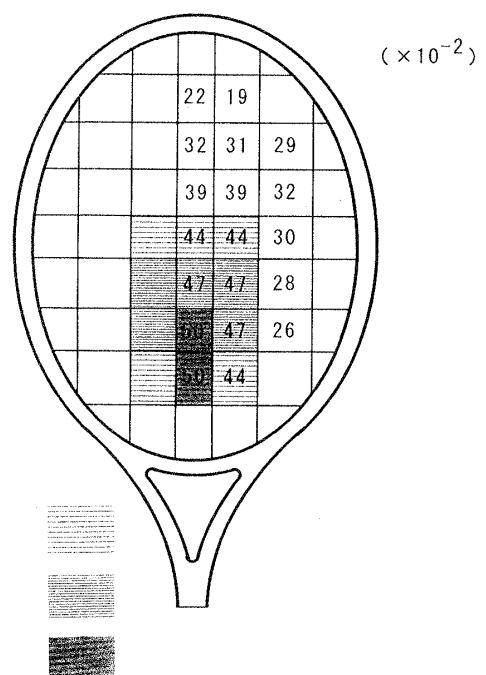


Fig. 7 Rebound power coefficient e ($V_{Bo} - V_{Ro} = 40$ ms)

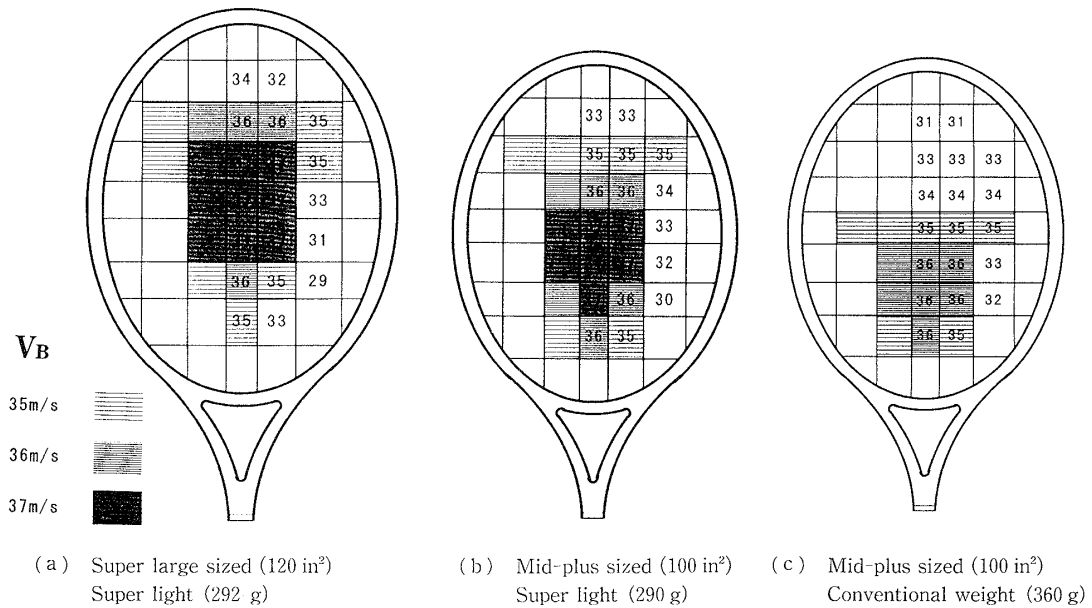


Fig. 8 Predicted sweet area with the post-impact ball velocity V_B . ($V_{Bo}=10$ ms, $N_s=56.9$ N/M)

図8は、肩関節トルク $N_s=56.9$ N・m、ボール入射速度 10 ms のときの打球速度 V_B の予測値である。 $I_A=0.085$ kgm², $I_{RS}=0.342$ kgm² を与えている⁽⁶⁾。ストリング面上の数値は打球速度を表しており、ボールの飛びのよい領域で濃淡で示している。図8(a)はEOS 120 A, (b)はEOS 100, (c)は従来形の標準的ラケット EX-II: 全長 680 mm, 100 in², 360 g, 重心まわり慣性モーメント 13.1 gm², 長さ方向軸まわり慣性モーメント 1.293 gm², 重心位置は 308 mm である。基本固有振動数は図8(a)137 Hz, (b)171 Hz, (c)122 Hz である。ボールの飛びに関しては、図8(a)が最もスイートエリアが広く、(c)が最も狭い。また図8(a)のスイートエリアはラケット面の中心近くに位置している。長手方向の中心線を大きく外れた場合は、先端側では図8(a)が打球は最も速いが、中心から根元側では(c)が最も速い。

4. 結 論

ボールとラケットの実験的同定結果と衝突解析により、ラケット面上の任意の位置、任意の速度でボールと衝突するときの反発係数およびラケットの反発力係数を定義し、ラケットをスイングしてボールを打撃したときのボールの飛びのよい領域(ボールの飛びに関するスイート・エリア)を予測する方法と適用例を示した。本論文の方法により、ボールの飛びに関するラケットの性能の特長とラケットの物理的特性との関係

を明らかにすることができる。

終わりに、実験用ラケットと資料の提供をいただいたヤマハ(株)スポーツ事業部、日頃ご討論いただいている棚橋応用力学研究所 棚橋良次博士、月刊テニスジャーナル編集部 前島芳雄、木下耕幸の両氏および日本スポーツ産業学会・スポーツ工学専門分科会および日本テニス学会の諸氏に厚くお礼申し上げます。また、図表作成にご助力いただいた埼玉工大・平成7年度4年生 太田憲、大桃仁、岸田敬実の各君に深謝する。

なお、本研究の一部は平成7, 8年度文部省科学研究費(基盤研究C)の援助を受けてなされたものであることを付記する。

文 献

- (1) 川副嘉彦, 機械学会シンポジウム講論集, No. 940-59, S (1994-11), 118-123.
- (2) 川副嘉彦, 機論, 58-552, C (1992), 2467-2474.
- (3) Casolo, F. and Ruggieri, G., *Meccanica*, Vol. 24 (1991), 501-504.
- (4) 川副嘉彦・友末亮三・吉成啓子・CASOLO, F., 第74期全国大会講論集, 96-15 (1996), 255-256.
- (5) 川副嘉彦, 機論, 61-584, C (1995), 1300-1307.
- (6) 川副嘉彦, 機械学会第69期全国講論集, 910-62, C (1991-10), 187-189.
- (7) KAWAZOE, Y., *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 42 (1993), 197-208.
- (8) 川副嘉彦・神田芳文, 機論, 59-566, C (1993), 3108-3115.
- (9) 浅見俊雄・宮下充正・渡辺融編, 現代体育・スポーツ体系, 7 (1984), 277, 講談社.