

卓球における衝突解析とラケットの性能予測

Prediction of Racket Performance Based on the Table Tennis Impact Analysis

○正 川副 嘉彦 (埼玉工大)

鈴木大介 (日立小平セミコン)

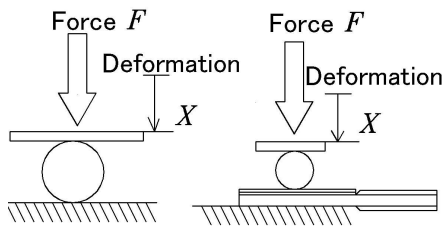
Yoshihiko KAWAZOE, Saitama Institute of Technology, Fusaiji 1690, Okabe-machi, Saitama
 Daisuke SUZUKI, Hitachi Kodaira Semi-con

This work investigated the physical properties of the racket and the ball, and predicts the impact force, the contact time, the deformation of ball and rubber, and the rebound power coefficient associated with the impact when the impact velocity and the impact location on the racket face is given. It clarifies the origin of ball speed. It is based on the experimental identification of the dynamic characteristics of the ball-racket system and an approximate nonlinear impact analysis, where the contact time is determined by the natural period of the whole system composed of the mass of the ball, the nonlinear stiffness of the ball and rubber, and the reduced mass of the racket at the impact location on the rubber face. Also considered is the energy loss during the impact. The diameter and the mass of the ball are 38 mm and 2.5 g respectively and the mass of the racket is 171 g including 79.5 g for two sheets of rubbers. This work enables us to predict quantitatively the factors associated with impact between a racket and a ball. The results show that the rebound power coefficient peaks at 18 mm from the center of the racket face and then diminishes because of the mass distribution of the racket. The rebound power coefficient decreases remarkably with increasing impact velocity.

Key words: Sports Engineering, Table Tennis, Racket Performance, Rebound Power, Impact Force, Contact Time, Deformation

現状では、スポーツ用具の性能評価には、経験の深いテスターやプレイヤーの感覚が優先する。一般プレイヤーにとっては、用具を使ってみて、はじめて性能がわかるというのが現実である。しかも、用具の性能はプレイの状況により異なるので、カタログの仕様などに記載されているラケット性能とユーザーによる経験的性能評価とが必ずしも一致しないという声もよく聞かれる。

本論文では、卓球ラケットの性能設計や客観的な性能評価に寄与するために、ボール (直径 38 mm, 質量 2.5 g) およびラケット (171 g, ラバー2 枚貼含む) 特性の実験的特定 (図 A1, 図 A2) に基づく衝突解析によりボールとラケットの反発係数, 接触時間, 変形量, ラケットの反発性能などを予測し, 卓球ラケットとボールの反発性能のメカニズムを明らかにした。ラケットとボールとの接触時間予測値は実測値にほぼ近い値を示し, (1) 卓球ラケットの打撃位置に換算した質量におよぼす腕系の影響は極めて大きい, ボールの質量が非常に小さいために, ラケットの反発性能におよぼす腕系の影響は小さいこと, (2) ラケット板の振動の反発性能への影響は少ないこと (図 A3), (3) 衝突速度が増大すると, 主にラバーの衝撃振動によるエネルギー損失により, 反発係数あるいは反発特性が大きく低減すること (図 A3), などが明らかになった。



(a) Ball (b) Composed rubber & ball system
 Fig.A1 Illustrated applied force - Deformation test

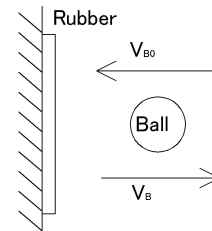
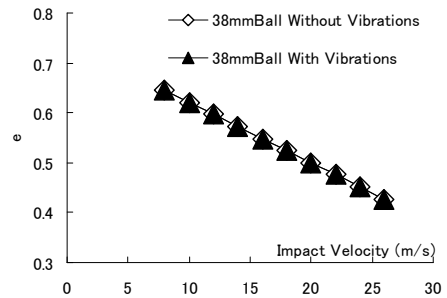
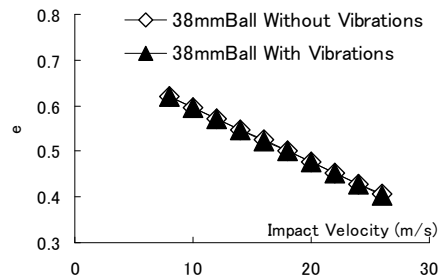


Fig.A2 Illustrated collision test between a ball and clamped rubber for estimation of energy loss of the ball and the rubber.



(a) when a ball strikes at the location of D(center).



(b) when a ball strikes at the location of A(Top side).
 Fig.A3 Predicted rebound power coefficient e of a racket.

1. 緒言

現状では、スポーツ用具の性能評価には、経験の深いテスターやプレイヤーの感覚が優先する。一般プレイヤーにとっては、用具を使ってみて、はじめて性能がわかるというのが現実である。しかも、用具の性能はプレイの状況により異なるので、カタログの仕様などに記載されているラケット性能とユーザーによる経験的性能評価とが必ずしも一致しないという声もよく聞かれる。

本論文では、卓球ラケットの性能設計や客観的な性能評価に寄与するために、ボール（直径 38 mm, 質量 2.5 g）およびラケット（171 g, ラバー2枚貼含む）特性の実験的測定に基づく衝突解析によりボールとラケットの反発係数、接触時間、変形量、ラケットの反発性などを予測し、卓球ラケットとボールの反発性能のメカニズムを明らかにする。

2. ボールと卓球ラケットの衝突モデル

ボールとラケットの衝突におけるラケットの反発性能を予測するための物理モデルを図1に示す。ボール・ラバー複合系の非線形復原力特性は荷重実験から求め、エネルギー損失は固定ラバーにボールを衝突させたときの反発係数 e_{RB} から求める。図1において、 m はボール質量、 M_r は打点に換算したラケットの換算質量である。

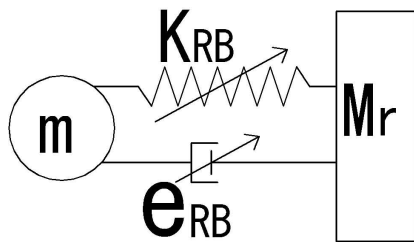


Fig.1 Impact model for table tennis

3. ボールとラバーの非線形復原力特性

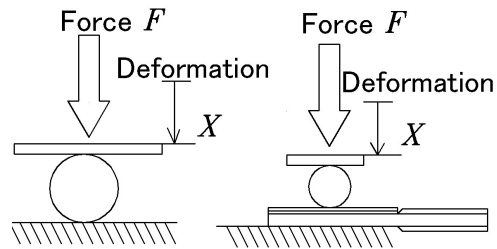
ボールに荷重を加えたとき（図2(a)）の変位（変形量）および板を固定したラバー上のボールに荷重を加えたとき（図2(b)）のボールとラバーの変位の和を測定した結果を図3に示す。ラバーはタマス社製 SRIVER（スポンジ厚さ 1.9 mm）である。実験時の室温は 31°C であった。

図3のボールとラバーの変形量の和からボールの変形量を差し引いて図4のようにラバーの復原力特性 $X_R - F$ を図式的に求めた。次に、中心に質量を集中させたボールがラバーに衝突し、ラバーに接触する片側だけ変形すると仮定してボールの復原力特性 $X_B - F$ を求め、さらに、 X_R と X_B の和を図式的に求めると、ボール・ラバー複合系の復原力特性 $X_{RB} - F$ は図4のようになる。最小自乗法により4次の多項式近似した式を $X_B = f(F)$, $X_R = f(F)$, $X_{RB} = f(F)$ のように表す。ただし、荷重: F [kgf], 変位: X [mm], 1 kgf = 9.8 [N] である。

$X_{RB} = f(F)$ を用いて、X軸に変形量を取り、Y軸に荷重をとって最小自乗法により多項式近似すると、復原力特性 $F_{RB} = f(X)$ は図5のようになる。

また、ボール・ラバー系の復原力 F_{RB} の変位 X に関する微分、すなわち、ボール・ラバー複合系のバネ剛性 $K_{RB} = f(X)$ は図6のようになる。ただし、バネ剛性: K_{RB} [kgf/mm], 変位: X [mm], 1 kgf = 9.8 [N] である。

$F_{RB} = f(X)$ と $K_{RB} = f(X)$, あるいは図5および図6から、ボール・ラバー複合系の復原力 F_{RB} とバネ剛性 K_{RB} の



(a) Ball (b) Composed rubber & ball system

Fig.2 Illustrated applied force - Deformation test

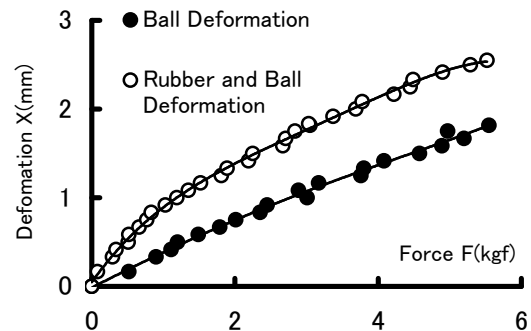


Fig.3 Results of force-deformation tests of a ball and a composed rubber & ball system (38 mm ball, 1 kgf = 9.8 N)

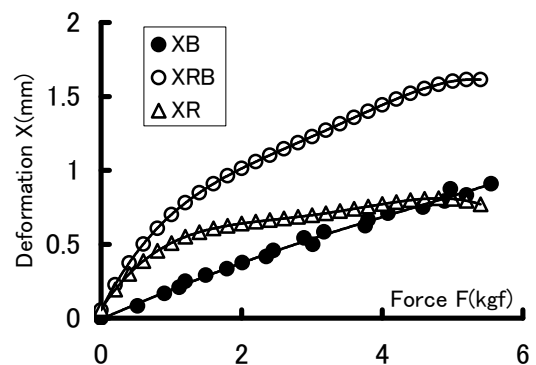


Fig.4 Deformation of a ball X_B , rubber X_R , and a composed rubber/ball system X_{RB} against applied forces assuming that a ball deforms only at the side in contact with the rubber (38 mm ball).

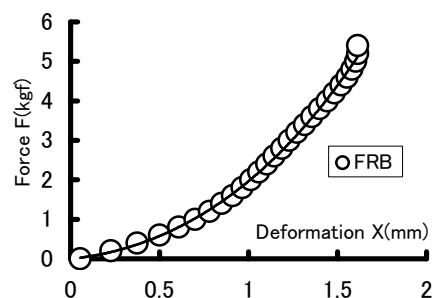


Fig.5 Restoring force vs. deformations of the composed rubber/ball system (38 mm ball).

関係が図7のように求まる。この場合の最小自乗近似式 $F_{RB}=f(K_{RB})$ は、式(1)のようになる。

$$F = -0.066K_{RB}^3 + 0.1433K_{RB}^2 + 0.1098K_{RB} - 0.0999 \quad (1)$$

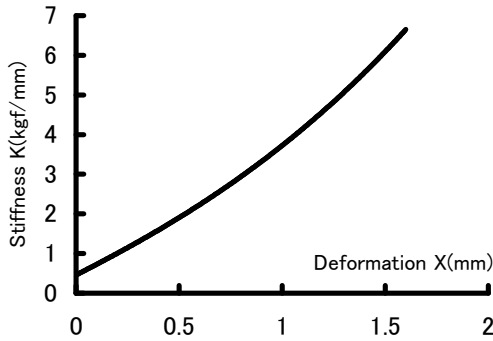


Fig.6 Stiffness vs. deformation of the composed rubber/ball system (38 mm ball).

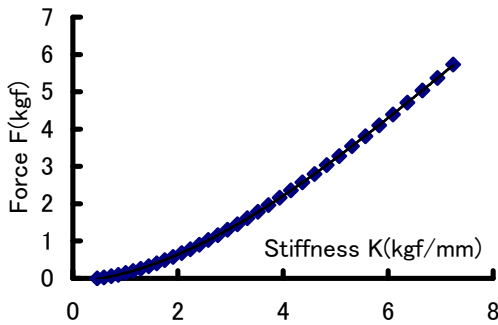


Fig.7 Restoring force vs. stiffness of the Composed rubber/ball system (38 mm ball).

4. ボールとラバーの衝突におけるエネルギー損失と反発係数

図8のように、固定した壁に卓球ラケット用ラバーを貼り付け、ボールをラバーに衝突させた場合の反発係数 e_{RB} (ボールの跳ね返り速度 V / 入射速度 V_0) の測定結果が図9である。ラバーは、タマス社製 SRIVER (スポンジ厚さ 1.9mm)、ボールは 38mmボールである。衝突速度の関数として最小自乗法により直線近似すると、式(2)および図9の直線のようになる。

衝突速度が増大すると、ボールとラバーの反発係数が低下し、エネルギー損失の割合が増大することを示している。

$$e_{RB} = -0.0123V_{B0} + 0.77 \quad (2)$$

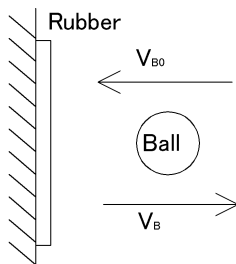


Fig.8 Illustrated collision test between a ball and clamped rubber for estimation of energy loss of the ball and the rubber.

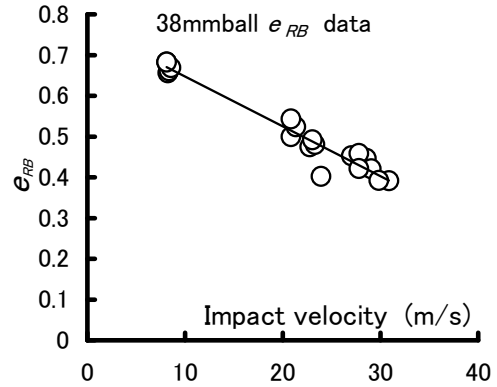


Fig.9 Measured coefficient of restitution between a ball and the clamped rubber (38 mm ball).

5. ラケット面の打点に換算した卓球ラケットの換算質量 宙づりラケットとボールが衝突する場合、ラケットの打撃点に換算した換算質量は

$$M_r = I_{G0X} / (I_{G0X} / M_R + b^2) \quad (3)$$

のように書ける。但し I_{G0X} : 重心まわりの慣性モーメント、 M_R : ラケット総質量、 b : 重心から打点までの距離である。重心まわりの慣性モーメント I_{G0X} については

$$I_{G0X} = I_A - M_R a^2 \quad (4)$$

のように求められる。但し I_A : ラケット剛体振り子実験の周期より求めた剛体振り子支点まわりの慣性モーメント、 M_R : ラケット質量 a : 支点から重心までの距離である。縦の中心線から外れた横方向の換算質量も同様に求めることができる。

腕系を考慮した場合の換算質量 M_r は、式(5)のようになる。

$$M_r = \frac{(M_R + M_H)I_{GH}}{I_{GH} + (M_R + M_H)b^2} \quad (5)$$

ただし、 M_R : ラケット質量、 M_H : 腕系等価質量、 I_{GH} : 腕系を考慮したときの重心まわりの慣性モーメント、 b : ラケット・腕系の重心から打点までの距離である。腕系を考慮したときの重心まわり慣性モーメントは

$$I_{GH} = I_{G0X} + M_R * A^2 + M_H (a - A)^2 \quad (6)$$

ただし、 a : 重心位置から握りの位置までの距離、 A : 腕系等価質量を付加したときの重心の移動量である。

図10は、ラケット板 (タマス社製 BISIDE) にラバー (タマス社製 SRIVER) を2枚貼ったラケット (質量 171g) の打点に換算した換算質量の計算結果である。スポンジ厚さ 1.9 mm、フェース面積は 185 cm²、質量 171 g、グリップ端からの重心位置 147mm、グリップ周りの慣性モーメント 2.51 gm²、縦軸周りの慣性モーメント 0.26 gm²である。横軸はラケットの長手(縦)方向中心線上の打点を示す。腕系を考慮した場合と宙づりラケットの場合を示している。腕系を考慮する場合はグリップ部の握りの位置に 1 kg の

腕系等価質量を付加している。ラケットの打点に換算した換算質量におよぼす腕系の影響は非常に大きい。

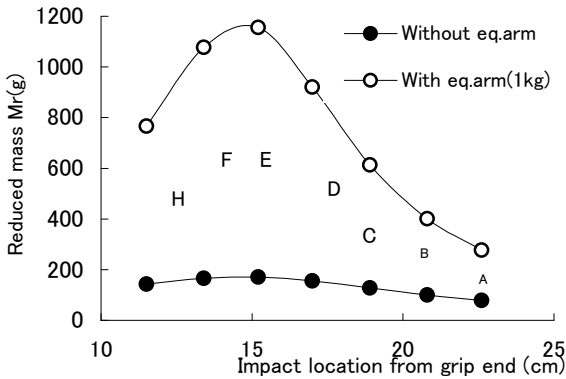


Fig.10 Reduced mass at the locations along the longitudinal center line on the racket face.

6. 衝突諸量の算出

ボールと接触するラバーの変形は、ボールが離れるときにもとに戻るから、衝突時のボールとラバーの接触時間をボール・ラバー・フレーム（板）複合系の固有周期の1/2と仮定し、図11のように、ボールとラバーが接触している間の平均衝突力 F_{MEAN} に対応するバネ剛性を K_{RB} とすると、接触時間は

$$T_C = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{mM_r}{(m+M_r)K_{RB}}} \quad (7)$$

となる。衝突直前、衝突直後のボール速度およびラケット速度をそれぞれ、 V_{B0} , V_B , V_{R0} , V_R とし、ボールとラバーの接触時間 T_C における平均の力を F_{MEAN} とすると、衝突における力積は式(8)、運動量保存則は式(9)、また、ラケット板の振動によるエネルギー損失を無視すると反発の式は式(10)のように書ける。

$$F_{MEAN} T_C = m(V_{B0} - V_B) \quad (8)$$

$$mV_{B0} + M_r V_{R0} = mV_B + M_r V_R \quad (9)$$

$$e_{RB} = -\frac{V_R - V_B}{V_{R0} - V_{B0}} \quad (10)$$

式(7)～(10)よりボール・ラバー・ラケット板複合系の復原力と等価バネ剛性の関係は次式のようになる。

$$F_{MEAN} = \frac{(V_{B0} - V_{R0})(1 + e_{RB})\sqrt{mM_r}}{\pi\sqrt{m + M_r}} \sqrt{K_{RB}} \quad (11)$$

衝突の関係式から導いた式(11)と荷重実験より求めた復原力とバネ剛性の関係式(1)を連立させると、図12に示すように衝突速度 ($V_{B0} - V_{R0}$) を与えときの平均衝突力 F_{MEAN} と複合バネ剛性 K_{RB} を計算することができる。さらに、これらの値が定まれば、対応するボールとラバーの変形量、接触時間 T_C なども決まる。

静止しているラケットにボールが衝突する場合、衝突直後のボール速度は

$$V_B = \frac{-V_{B0}(m - e_{RB}M_r)}{m + M_r} \quad (12)$$

で求められ、衝突直前と衝突直後のボール速度の比を表す反発力係数 e (3) も次式から算出できる。

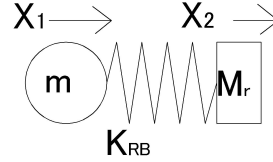


Fig.11 Model for deriving the contact time during impact between a racket and a ball.

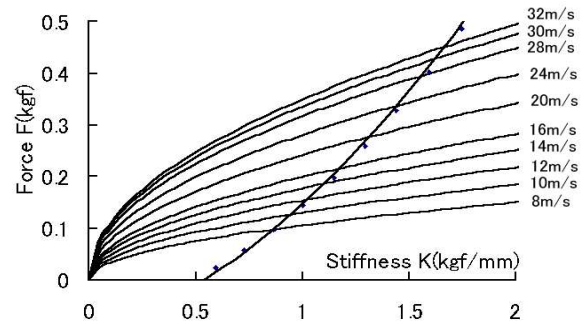


Fig.12 Graphical description of the derivation of equivalent impact force and the equivalent stiffness of the composed rubber/ball system against the impact velocity during impact between a ball and a racket.

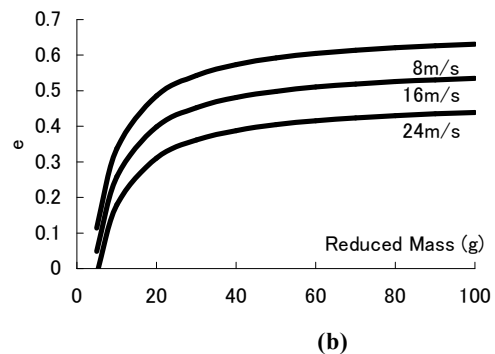
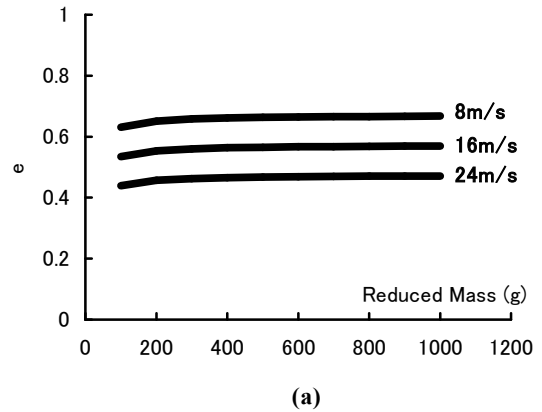


Fig.13 Effect of reduced mass on the rebound power coefficient

$$e = -\frac{V_{B0}}{V_B} = \frac{m - e_{RB} M_r}{m + M_r} \quad (13)$$

図13は、式(13)を用いて、ラケット面打点の換算質量を変えたときの反発力係数への影響を計算したものである。衝突速度が8, 16, 24m/s の場合を示している。換算質量を増しても反発力係数への影響は非常に小さい。その理由は、ラケット単体だけでも、その換算質量はボールに比べたらはるかに大きいからである。図13(b)は拡大図である。換算質量が20g以下になると急激に反発力係数は低下するが、ラケット単体の実際の換算質量は最も小さい打点(A打点)においても78.1gである。

腕系を考慮すると換算質量は非常に大きくなるが、反発力係数にはほとんど影響しないということになる。

図14は衝突力ー衝突速度、図15は接触時間ー衝突速度、図16はボール変形量ー衝突速度、図17はラバー変形量ー衝突速度の計算値である。

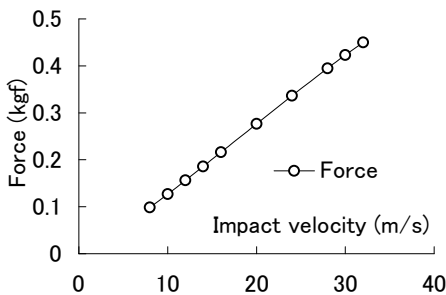


Fig.14 Calculated impact force vs. impact velocity.

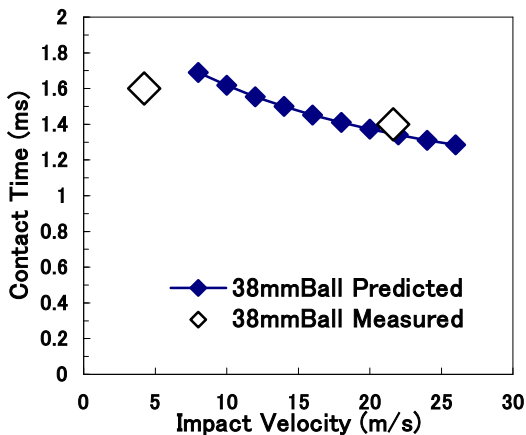


Fig.15 Calculated contact time vs. impact velocity.

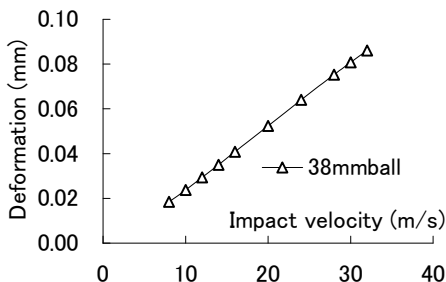


Fig.16 Calculated deformation of the ball vs. impact velocity.

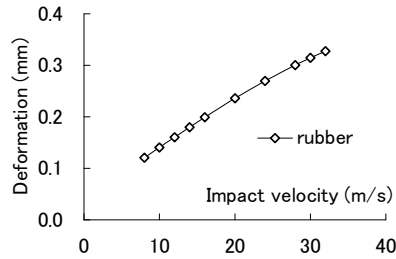


Fig.17 Calculated deformation of the rubber vs. impact velocity.

7.インパクトにおけるラケットの応答変位振幅の予測⁽³⁾

7.1 ラケットの振動特性の同定

実験モード解析に基づいて、ラケット面上の任意の単位衝突力が作用した場合の任意の点における変位を周波数領域で求めておく。インパクトにおけるボールとラバー間に作用する衝撃力波形を実フーリエ変換し、周波数領域における衝突力を与えてやれば、打点と衝突速度に対するラケット面上の任意の点の応答変位振幅を計算することができる。ラケット応答の減衰波形も予測できる。反発性能はインパクトの瞬間の挙動で決まるから、インパクト直後のラケットの最大振動振幅を求め、ラケット振動によるエネルギー損失を計算する。

7.2 衝突力波形近似およびラケットの応答変位振幅の予測

ラケットの振動には、力積と接触時間のほかに、衝突力の波形が影響するから、力積および接触時間の値は変えないで、ボールとラバー間に作用する衝突力波形を実波形に近い正弦半波パルスで近似すると、

$$f(t) = \frac{\pi}{2} F_{MEAN} \sin\left(\frac{\pi}{T_C} t\right) \quad (14)$$

と表すことができ、周波数領域で k 次モード成分に対する打撃点 j における衝撃力成分は

$$S_j(f) = \frac{2F_{MAX}T_C}{\pi} \left| \frac{\cos(\pi f_k T_C)}{1 - (2f_k T_C)^2} \right| \quad (15)$$

ラケット面上の点 j に式(21)での衝突力が作用した場合のラケット上の点 i における k 次モード応答振幅の和 X_{ij} は

$$X_{ijk} = r_{ijk} S_j(f_k) = \frac{r_{i0k} r_{0jk}}{r_{00k}} S_j(f_k) \quad (16)$$

と近似できる。ただし、 r_{ijk} : 任意の点 i と j の間の k 次の振動モードの留数、 r_{i0k} : 実験モード解析から得られたラケット上の打撃点 i と固定された応答点 (参照点) 0 の間の既知の留数、 r_{0jk} ($=r_{j0k}$) 打撃点 j と応答点 0 の間の既知の留数、 r_{00k} : 参照点 (ピックアップ部) 0 における既知の駆動点留数である。

8. ラケット板の振動を考慮した反発係数・反発力係数

ラケットの任意の打点にボールが衝突した瞬間のラケットの応答速度振幅分布を求め、ラケットの長さ方向の質量分布を一樣とみなせばラケット平均速度振幅 V_m を用いラケット板の振動によるエネルギー損失 E_l を以下のように求めることができる。

$$E_l = \frac{M_R V_m^2}{2} \quad (17)$$

ボールとラバーの衝突におけるエネルギー損失 E_2 は

反発係数 e_{RB} として考慮してあるので、ラケット板の振動を考慮した全エネルギー損失 E は、

$$E_2 = \frac{mM_r(1-e_{RB}^2)}{2(m+M_r)}V_{B0}^2 \quad (18)$$

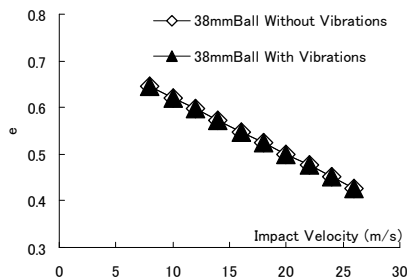
として E_1 と E_2 の和として求められる。したがって、反発係数 $e_r (= (V_R - V_B)/V_{B0})$ 、静止ラケットの場合には、全エネルギー損失 E が既知ならば以下のように求まる。

$$e_r = \sqrt{1 - \frac{2E(m+M_r)}{mM_rV_{B0}^2}} \quad (19)$$

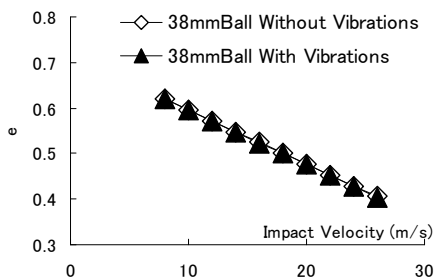
したがって、ラケット板の振動によるエネルギー損失を考慮した反発力係数は以下のように求まる。

$$e = \frac{m - e_r M_r}{m + M_r} \quad (20)$$

図 18(a)は、ラケット面中心付近の D 打点にボールが衝突した際の、ラケット板の振動によるエネルギー損失を考慮したときと無視したときの反発力係数の比較である。ラケット板の振動によるエネルギー損失を考慮しても反発力係数への影響は少ない。図 18(b)は、ラケット先端部 A 打点での衝突における反発力係数の比較である。D 打点に比べて振動振幅が大きい A 打点に衝突したときも、ラケット板の振動におけるエネルギー損失の影響は非常に少ない。したがって、卓球ラケットにおいては、ラケット板の振動によるエネルギー損失を無視して計算しても反発力係数にはほとんど影響しないことになる。



(a) when a ball strikes at the location of D(center).



(b) when a ball strikes at the location of A(Top side).

Fig.18 Predicted rebound power coefficient e of a racket.

図 19 は、ラケットの長手軸（縦方向）上の打点における反発力係数の予測値を示す。衝突速度は 30 m/s であり、横軸はグリップ端からの距離である。図 20 は、静止ラケットにボールが衝突するときの入射速度に対する跳ね返り速度である。

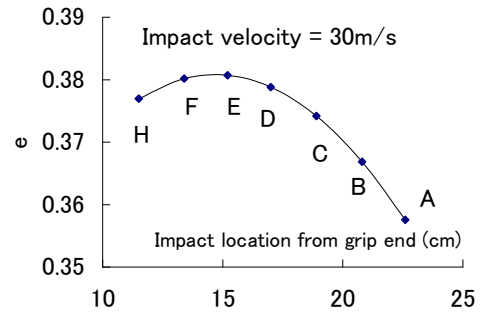


Fig.19 Predicted rebound power coefficient e when a ball strikes a suspended racket at the locations of longitudinal centerline on the racket face.

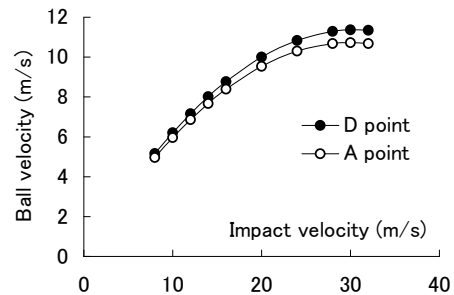


Fig.20 Predicted rebound ball velocity when a ball strikes a suspended racket at the location of D(center) and A(Top side).

9. 結論

- (1) 卓球では、ボール質量がラケットに比べかなり小さいので、ラケット重量が増してもボール跳ね返り速度にはほとんど影響しない。
 - (2) ラケット面の打点に換算した換算質量への腕系の影響は非常に大きいですが、反発性への影響は小さい。
 - (3) ラケット板の振動によるエネルギー損失は少なく、反発性には板の振動は無視して計算することができる。
 - (4) 衝突速度が増大すると、反発係数が大きく低減する。
- 終わりに、38mm ボールと固定ラバーの衝突実験を実施していただいたタマス（株）研究開発チームの諸氏に深謝し、ボールとラバーの圧縮実験装置の製作および実験指導をいただいた埼玉工業大学・益田教授に厚くお礼申しあげます。打球感とグリップ振動の役割および新規則 40mm ボールの結果については別報に述べる。

文献

- (1) 川副嘉彦, テニスのインパクトにおけるラケットのスイートエリアの予測 (反発係数, 反発力, ボールの飛び), 日本機械学会論文集, 64-623, (1998), pp.2382-2388.
- (2) 棚橋良次, スキー複合構造体の力学的設計法とその応用に関する研究, 東京大学博士論文, (1996), p.2.
- (3) 川副嘉彦, 衝突現象を考慮したテニスラケットの CAE, 日機械学会論文集, 58-552, (1992), pp.2467-2474.
- (4) 川副嘉彦, テニスのフォアハンド・ドライブにおけるテニスラケット・グリップと手首関節の衝撃振動, 日本機曾学会 (No.97-34) シンポジウム講演論文集, pp.28-32
- (5) Y. Kawazoe & D. Suzuki, The 7th ITTF SPORTS SCIENCE CONGRESS, Proceedings, p.13, p.32, (April, 2001), Osaka Japan